练习题 4.3

2. 证明，只要 $\eta_1 < 1$，Galton-Watson 过程所有非零状态都是非常返的。

证明：

根据 η_0 的情况分类讨论，当 $\eta_0 > 0$ 时，则对于任意状态 $i \in \mathbb{N}^+$，$i \to 0$ 但 $0 \not\to i$（0 是吸收态），所以 i 非常返。

当 $\eta_0 = 0$ 时，则 $\forall n \in \mathbb{N}$，$X_{n+1} \geqslant X_n$（所有个体都至少产生一个后代），则当 $j > i$ 时 $p_{ji} = 0$，$f_{ji} = 0$，所以对于状态 $i \in \mathbb{N}^+$，

$$f_{ii} = p_{ii} + \sum_{j=i+1}^{\infty} p_{ij} f_{ji} = p_{ii}$$

设 Y_k 表示服从后代分布的随机变量，则

$$p_{ii} = P\left(\sum_{k=1}^{i} Y_k = i\right) = P(Y_k = 1,\ k = 1, 2, \cdots, i) = (\eta_1)^i < 1$$

所以 $f_{ii} < 1$，即 i 非常返。 □

3. 假设在红细胞培养试验中红细胞的生存时间是 1 分钟，一个红细胞死亡时以 1/4 的概率生成两个红细胞，以 2/3 的概率产生一个红细胞一个白细胞，以 1/12 的概率产生两个白细胞，白细胞死亡后不会再生。再生的红细胞又按前面的概率再生，且彼此互不干扰。初始时只有一个红细胞。

(1) 求在 $n + 0.5$ 分钟的培养过程中都没有白细胞的概率。

解：

设 $X = \{X_n\ ;\ n \geqslant 0\}$ 为在第 $n + 0.5$ 分钟的时刻红细胞的数量，则 X 是 G-W 分支过程，后代分布为 $\eta = (\eta_0 = \frac{1}{12}, \eta_1 = \frac{2}{3}, \eta_2 = \frac{1}{4})$。因为每一时刻的白细胞都由上一时刻的红细胞产生，所以在 $n + 0.5$ 分钟的培养过程中都没有白细胞也即在 $n - 1 + 0.5$ 分钟的培养过程中产生的所有红细胞死亡时都没有产生白细胞，那么这些红细胞死亡时都产生了两个红细胞，所以所求的概率为

$$\prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{4}\right)^{(2^k)} = 2^{4-2^{n+1}}$$

□

(2) 在整个细胞培养过程中，细胞最终灭绝。求该现象发生的概率。

解：

由于白细胞死亡后不会再生，所以只需要考虑红细胞的灭绝概率，即分支过程 X 的灭绝概率。后代分布的概率母函数为 $\eta(s) = \frac{1}{4}s^2 + \frac{2}{3}s + \frac{1}{12}$，解 $\eta(s) = s$ 得：$s_1 = \frac{1}{3}, s_2 = 1$。所以该分支过程的灭绝概率为 $\mathbf{\frac{1}{3}}$。 □

4. 假设分支过程 X 的初值为 $m \geqslant 1$, 后代分布的概率母函数为 $\eta(s) = 1-p+ps$, 其中 $0 < p < 1$, 求该分支过程灭绝时间的分布。

解：

初值为 1 时，$\forall n \in \mathbb{N}$，设 X_n 的概率母函数为 Φ_n，则 $\Phi_{n+1}(s) = 1 - p + p\Phi_n(s)$，所以 $\Phi_{n+1}(s) - 1 = p(\Phi_n(s) - 1)$，$\Phi(s) = \eta(s) = 1 - p + ps$。所以 $\Phi_n(s) = p^n(s-1) + 1$。

初值为 $m \geqslant 1$ 时，由于初始分布中的个体互相独立，所以整个分支过程灭绝相当于初始的每个个体所在的分支都灭绝，则 $P_m(\tau_0 \leqslant k) = [P_1(\tau_0 \leqslant k)]^m = [\Phi_k(0)]^m$ ，从而

$$\boldsymbol{\forall k \geqslant 1,\ P_m(\tau_0 = k)} = P_m(\tau_0 \leqslant k) - P_m(\tau_0 \leqslant k-1) \boldsymbol{= \left(1 - p^k\right)^m - \left(1 - p^{k-1}\right)^m}$$

此即为该分支过程灭绝时间的分布。 □

5. 已知分支过程 X 的后代分布概率母函数 $\eta(s) = 1/(3-2s)$，而且 $X_0 = k$，求在过程灭绝条件下存活过的粒子平均数。

解：

当 $X_0 = 1$ 时在过程灭绝条件下存活过的粒子平均数为 $\frac{1}{1-\eta'(q)}$，那么当 $X_0 = k$ 时，由于各初始个体互相独立地产生后代，所以在过程灭绝条件下存活过的粒子平均数为 $\frac{k}{1-\eta'(q)}$。

由 $\eta(s) = \frac{1}{3-2s} = s$ 可解得 $s_1 = \frac{1}{2}$，$s_2 = 1$, 所以灭绝概率 $q = \frac{1}{2}$, 所以 $\eta'(q) = \frac{2}{(3-2q)^2} = \frac{1}{2}$, 所以在过程灭绝条件下存活过的粒子平均数为

$$E\left(\sum_{i=0}^{\infty} X_i \middle| \tau_0 < \infty\right) = \frac{k}{1-\eta'(q)} = \frac{k}{1-\frac{1}{2}} = \boldsymbol{2k}$$

□

6. 假设 X 是初值为 1 的 Galton-Watson 分支过程。后代分布的概率母函数为

$$g(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}s + \frac{1}{6}s^2$$

以 M 表示该过程存活过但没有后代的粒子数量，求 $E(M)$。

解：

先求灭绝概率，$g(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}s + \frac{1}{6}s^2 = s$ 解得 $s_1 = 1$，$s_2 = 3$，所以灭绝概率 $q = 1$，所以 $m = g'(1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times 2 = \frac{2}{3}$，则该过程存活过的粒子平均数为

$$E\left(\sum_{k=0}^{\infty} X_k\right) = \frac{1}{1-g'(1)} = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3$$

从后代分布的概率母函数可知每个粒子没有后代的概率为 $\frac{1}{2}$，所以

$$\boldsymbol{E(M)} = \frac{1}{2}E\left(\sum_{k=0}^{\infty} X_k\right) \boldsymbol{= \frac{3}{2}}$$

□

7. 设 X 为 G-W 分支过程，τ_0 是灭绝时间。证明 $E_k\left(s^{\tau_0}\right) \geqslant \left[E_1\left(s^{\tau_0}\right)\right]^k$。

证明：

设 $\tau_0^{(i)}$ 表示初始第 i 个个体所在分支的灭绝时间，则

$$E_k(s^{\tau_0}) = E(s^{\tau_0}|X_0 = k) = E\left(s^{\max\left\{\tau_0^{(1)},\cdots\tau_0^{(k)}\right\}}\right)$$

因为 $0 \leqslant s \leqslant 1$ 且 $\max\{\tau_0^{(1)},\cdots\tau_0^{(k)}\} \leqslant \sum_{i=1}^k \tau_0^{(i)}$，所以

$$\text{上式} \geqslant E\left(s^{\sum_{i=1}^k \tau_0^{(i)}}\right) = E\left(\prod_{i=1}^k s^{\tau_0^{(i)}}\right) \xlongequal{\tau_0^{(i)}\text{独立}} \prod_{i=1}^k E\left(s^{\tau_0^{(i)}}\right) = \left[E_1\left(s^{\tau_0}\right)\right]^k$$

所以 $E_k\left(s^{\tau_0}\right) \geqslant \left[E_1\left(s^{\tau_0}\right)\right]^k$。 $\square$