第六章　函数

6.1　函数的概念和性质

1. $f: X \to Y$。对任意 $M \subseteq X$，定义 $f(M) = \{f(x) \mid x \in M\}$。对于任意 $A, B \subseteq X$，

   (1) 证明 $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$；

   证明：

   $\forall Z \in f(A \cup B)$, 则 $\exists x \in A \cup B$, 使得 $Z = f(x)$，因此 $x \in A$ 或者 $x \in B$。

   若 $x \in A$，则 $Z \in f(A)$；若 $x \in B$，则 $Z \in f(B)$。

   于是 $Z \in f(A) \cup f(B)$。

   所以 $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$。

   $\forall Z \in f(A) \cup f(B)$，则 $Z \in f(A)$ 或 $Z \in f(B)$。

   若 $Z \in f(A)$，则 $\exists x \in A$，使得 $Z = f(x)$，因此 $x \in A \cup B$，所以 $Z \in f(A \cup B)$。

   所以 $f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$。

   所以 $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$。 □

   (2) 举例说明 $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$。

   若 f, A, B 定义如下：

   $$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$$

   $$A = (-\infty, 0] \quad B = [0, +\infty)$$

   则 $f(A \cap B) = f(\{0\}) = \{0\}$，$f(A) \cap f(B) = [0, +\infty)$，

   则 $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$。

2. $f: X \to Y$，下列命题是否成立？

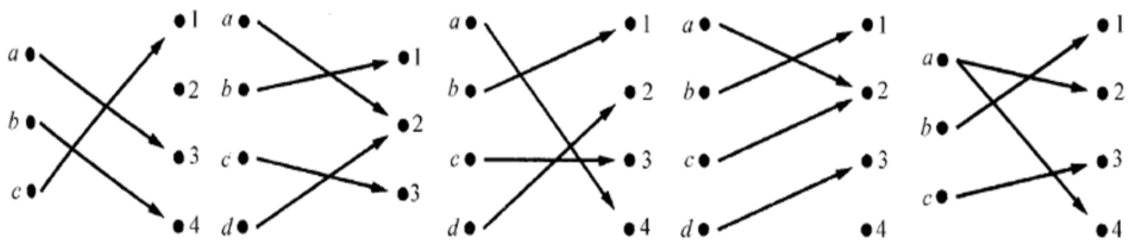
   (1) f 是一对一的当且仅当对任意 $a, b \in X$，当 $f(a) = f(b)$ 时，必有 $a = b$。

   成立，即一对一的定义的逆否命题。

   (2) f 是一对一的当且仅当对任意 $a, b \in X$，当 $f(a) \neq f(b)$ 时，必有 $a \neq b$。

   不成立，取 $X = \{1, 2\}$，$f(x) = \{\{1, 1\}, \{2, 1\}\}$。则 f 为 X 到 Y 的函数，且满足 $\forall a, b \in X$，$f(a) \neq f(b) \Rightarrow a \neq b$，但 f 不是一对一的。

3. 下图展示了五个关系的关系图。问：这些关系中，哪些是函数？哪些是一对一的函数？哪些是到上的函数？哪些是一一对应？



设从左到右分别为图 1、2、3、4、5。

图 1、2、3、4 是函数；

图 1、3 是一对一的函数；

图 2、3 是到上的函数；

图 3 是一一对应的函数。

4. $f: X \to Y, g: Y \to Z$。命题 "$f \circ g$ 是一对一的当且仅当 f 和 g 都是一对一的" 是否成立？

成立。

若 f 和 g 都是一对一的，则 $f \circ g$ 是一对一的为定理 6.1.2，现给出证明如下：

证明：

由 f 是一对一的可知 $\forall a, b \in X$ 且 $a \neq b$，有 $f(a) \neq f(b)$，而 g 也是一对一的，所以 $g(f(a)) \neq g(f(b))$，即 $f \circ g(a) \neq f \circ g(b)$，所以 $f \circ g$ 是一对一的。

□

下证若 $f \circ g$ 是一对一的，则 f 和 g 都是一对一的。

证明：

反证，若 f 和 g 都不是一对一的，则 $\exists a, b \in X$，使得 $f(a) = f(b)$，因此 $g(f(a)) = g(f(b))$，即 $f \circ g(a) = f \circ g(b)$，所以 $f \circ g$ 也不是一对一的。

□