第一章　单元作业 5

1. 设随机变量 X 与 Y 满足 $EX=EY=0$, $\operatorname{Var}X=\operatorname{Var}Y=1$, $\operatorname{Cov}(X,Y)=\rho$，证明 $E\max(X^2,Y^2)\leqslant 1+\sqrt{1-\rho^2}$

证明：

因为 $\operatorname{Cov}(X,Y)=EXY-EXEY=\rho$，而 $EX=EY=0$，所以 $EXY=\rho$。而 $\operatorname{Var}X=EX^2-(EX)^2=EX^2=1$，$\operatorname{Var}Y=EY^2-(EY)^2=EY^2=1$。

根据 $\max(a,b)=\frac{|a+b|+|a-b|}{2}$ 和期望的线性性质，

$$E\max(X^2,Y^2)=E\frac{|X^2+Y^2|+|X^2-Y^2|}{2}=\frac{1}{2}E\left|X^2+Y^2\right|+\frac{1}{2}E\left|X^2-Y^2\right| \tag{1}$$

其中，$E|X^2+Y^2|=E(X^2+Y^2)=EX^2+EY^2=2$，$E|X^2-Y^2|=E|X+Y||X-Y|$。根据 Cauchy-Schwarz 不等式，$(E|X+Y||X-Y|)^2\leqslant E|X+Y|^2E|X-Y|^2$。

其中 $E|X+Y|^2=E(X^2+2XY+Y^2)=EX^2+2EXY+EY^2=2+2\rho$，$E|X-Y|^2=E(X^2-2XY+Y^2)=EX^2-2XY+EY^2=2-2\rho$。

因此 $(E|X+Y||X-Y|)^2\leqslant(2+2\rho)(2-2\rho)=4(1-\rho^2)$，两边同取根号可得

$$E\left|X^2-Y^2\right|=E|X+Y||X-Y|\leqslant 2\sqrt{1-\rho^2}$$

再代入回 (1)，即可得到

$$E\max(X^2,Y^2)\leqslant\frac{1}{2}\times 2+\frac{1}{2}\times 2\sqrt{1-\rho^2}=1+\sqrt{1-\rho^2}$$

□

2. 设随机变量 (X,Y) 服从均匀分布 $U(D)$，其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$，求 X 与 Y 的协方差。

解：

设 $p(x,y)$ 表示随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数，则可以得到

$$p(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & (x,y)\in D\\ 0, & (x,y)\notin D\end{cases}$$

$$\begin{aligned}EX&=\iint xp(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D x\cdot\frac{1}{\pi}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\xlongequal{\text{对称性}}0\\ EY&=\iint yp(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D y\cdot\frac{1}{\pi}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\xlongequal{\text{对称性}}0\\ EXY&=\iint xyp(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D xy\cdot\frac{1}{\pi}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\xlongequal{\text{对称性}}0\end{aligned}$$

所以 X 与 Y 的协方差为

$$\operatorname{Cov}(X,Y)=EXY-EXEY=0$$

□

3. 设随机变量 (X,Y) 服从均匀分布 $U(D)$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0<x<y<1\}$，求相关系数 $\operatorname{Corr}(X,Y)$。

解：

设 $p(x,y)$ 表示随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数，则可以得到

$$p(x,y)=\begin{cases}2, & 0<x<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$\begin{aligned}EX&=\iint xp(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D x\cdot 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\int_0^y 2x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{3}\\ EY&=\iint yp(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D y\cdot 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\int_0^y 2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{2}{3}\\ EXY&=\iint xyp(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D xy\cdot 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\int_0^y 2xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

所以 X 与 Y 的协方差为

$$\operatorname{Cov}(X,Y)=EXY-EXEY=\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{36}$$

还需要计算

$$EX^2=\iint x^2p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D x^2\cdot 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\int_0^y 2x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{6}$$

$$EY^2=\iint y^2p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D y^2\cdot 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\int_0^y 2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}$$

所以 X 与 Y 的相关系数为

$$\begin{aligned}\operatorname{Corr}(X,Y)&=\frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\operatorname{Var}X\cdot\operatorname{Var}Y}}=\frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sqrt{(EX^2-(EX)^2)\cdot(EY^2-(EY)^2)}}\\ &=\frac{\frac{1}{36}}{\sqrt{\left(\frac{1}{6}-\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)\left(\frac{1}{2}-\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)}}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

□

4. 设随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数为 $p(x,y)=\begin{cases}e^{-y}, & 0<x<y\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$，设 $y>0$，求在 $Y=y$ 时 X 的条件概率密度函数 $p_{X|Y}(x|y)$，条件数学期望 $E(X|Y=y)$。进一步地，利用重期望公式求 EX。

解：

先计算边际概率密度函数

$$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_0^y e^{-y}\mathrm{d}x, & y>0\\ 0, & y\leqslant 0\end{cases}=\begin{cases}ye^{-y}, & y>0\\ 0, & y\leqslant 0\end{cases}$$

之后计算条件概率密度函数

$$p_{X|Y}(x|y)=\frac{p(x,y)}{p_Y(y)}=\begin{cases}\frac{1}{y}, & 0<x<y\\ 0, & 0<y\leqslant x\text{或}y>0,x\leqslant 0\end{cases}$$

根据数学期望的定义，

$$E(X|Y=y)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp_{X|Y}(x|y)\mathrm{d}x=\int_0^y x\cdot\frac{1}{y}\mathrm{d}x=\frac{y}{2}$$

再利用重期望公式，

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}E(X|Y=y)p_Y(y)\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\frac{y}{2}\cdot ye^{-y}\mathrm{d}y=1$$

□

5. 设 X 服从指数分布 $\operatorname{Exp}(\lambda)$，求 $Y=[X]$ 的分布。（这里符号 $[a]$ 表示不超过 a 的最大整数。

解：

由于 $Y=[X]$ 是离散型分布，所以求出 Y 的分布列即可

$$p_i=\int_i^{i+1}\lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x=(e^{\lambda}-1)e^{-\lambda(i+1)}$$

□

6. 设随机变量 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$, $a>0$，记 $Y=\begin{cases}X, & |X|<a\\ -X, & |X|\geqslant a\end{cases}$，求随机变量 Y 的分布。

解：

因为 $X\sim N(0,1)$，所以 $-X\sim N(0,1)$，所以随机变量 Y 服从标准正态分布 $N(0,1)$，即

$$Y\sim N(0,1)$$

□

7. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}2, & \text{若}0<x<y<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求

(1) 随机变量 $T=X-Y$ 的概率密度函数 $p_T(t)$；

(2) 概率 $P(Y-X\leqslant\frac{1}{2})$。

解：

(1) 根据连续情形的卷积公式，

$$p_T(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,x-t)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_0^{t+1}2\mathrm{d}x, & -1<t<0\\ 0, & t\leqslant -1\text{或}t\geqslant 0\end{cases}=\begin{cases}2t+2, & -1<t<0\\ 0, & t\leqslant -1\text{或}t\geqslant 0\end{cases}$$

(2)

$$P(Y-X\leqslant\frac{1}{2})=P(X-Y\geqslant\frac{1}{2})=P(T\geqslant\frac{1}{2})=0$$

□

8. 设 X 与 Y 独立同分布，共同分布为 $N(0,1)$，求概率 $P(|X+Y|\leqslant|X-Y|)$。

解：

$$\begin{aligned}P(|X+Y|\leqslant|X-Y|)&=P\left((X+Y)^2\leqslant(X-Y)^2\right)\\ &=P(X^2+2XY+Y^2\leqslant X^2-2XY+Y^2)\\ &=P(4XY\leqslant 0)\\ &=P(XY\leqslant 0)\\ &=P(X\leqslant 0,Y>0)+P(X>0,Y\leqslant 0)\\ &\xlongequal{X\text{与}Y\text{独立}}P(X\leqslant 0)P(Y>0)+P(X>0)P(Y\leqslant 0)\\ &\xlongequal{X\sim N(0,1),Y\sim N(0,1)}\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\\ &=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

□