第一章　单元作业 4

1. 若二维离散型随机变量 (X,Y) 有联合分布列如下：

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	0

求 X 与 Y 的边际分布列。

解：

X 和 Y 的边际分布列分别为

X	0	1
P	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{8}$

Y	0	1	2
P	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$

□

2. 设随机变量 (X,Y) 的概率密度函数为

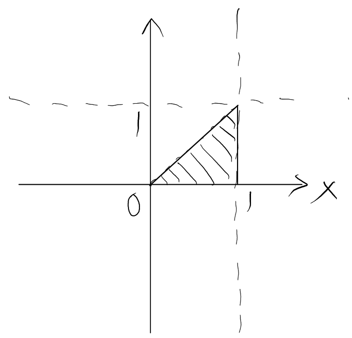
$$p(x,y)=\begin{cases}3x, & \text{若}0<y<x<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 X 与 Y 的边际概率密度函数，并判断 X 与 Y 是否互相独立。

解：

$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^x 3x\mathrm{d}y, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & x<0\text{或}x>1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}3x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & x<0\text{或}x>1\end{cases}$$



$$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_y^1 3x\mathrm{d}x, & 0\leqslant y\leqslant 1\\ 0, & x<0\text{或}x>1\end{cases}$$
$$=\begin{cases}\frac{3}{2}-\frac{3}{2}y^2, & 0\leqslant y\leqslant 1\\ 0, & y<0\text{或}y>1\end{cases}$$

$p(1,1)=3, p_X(1)=3, p_Y(1)=0$，于是 $p(1,1)\neq p_X(1)\cdot p_Y(1)$，所以 X 和 Y 互相不独立。

□

3. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 X 服从均匀分布 $U(0,1)$，Y 服从指数分布 $\mathrm{Exp}(1)$。求

(1) (X,Y) 的联合概率密度函数 $p(x,y)$；

解：

$$p_X(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1]\\ 0, & x<0\text{或}x>1\end{cases}\qquad p_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y\geqslant 0\\ 0, & y<0\end{cases}$$

$$p(x,y)=\begin{cases}e^{-y}, & x\in[0,1], y\geqslant 0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

□

(2) 概率 $P(X+Y\leqslant 1)$；

解：

令 $Z=X+Y$，则随机变量 Z 的概率密度函数为

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_X(x)p_Y(z-x)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_0^1 e^{x-z}\mathrm{d}x, & z>1\\ \int_0^z e^{x-z}\mathrm{d}x, & 0\leqslant z\leqslant 1\\ 0, & z<0\end{cases}=\begin{cases}e^{1-z}-e^{-z}, & z>1\\ 1-e^{-z}, & 0\leqslant z\leqslant 1\\ 0, & z<0\end{cases}$$

所以

$$P(X+Y\leqslant 1)=\int_{-\infty}^{1}p_Z(z)\mathrm{d}z=\int_0^1(1-e^{-z})\mathrm{d}z=1+(\frac{1}{e}-1)=\frac{1}{e}$$

□

(3) 概率 $P(X\leqslant Y)$。

解：令随机变量 $Z=X-Y$，则 Z 的概率密度函数为

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,x-z)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & z>1\\ \int_z^1 e^{z-x}\mathrm{d}x, & 0\leqslant z\leqslant 1\\ \int_0^1 e^{z-x}\mathrm{d}x, & z<0\end{cases}=\begin{cases}0, & z>1\\ 1-e^{z-1}, & 0\leqslant z\leqslant 1\\ e^z-e^{z-1}, & z<0\end{cases}$$

所以

$$P(X \leqslant Y) = P(X - Y \leqslant 0) = \int_{-\infty}^{0} (e^z - e^{z-1}) \mathrm{d}z = 1 - \frac{1}{e}$$

□

4. 设随机变量 (X, Y) 的概率密度函数为

$$p(x,y) = \begin{cases} Ae^{-(3x+2y)}, & x > 0, y > 0; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

求:

(1) 常数 A 的值;

解 :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int_{0}^{+\infty} \int_{0}^{+\infty} Ae^{-(3x+2y)} \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int_{0}^{+\infty} -\frac{1}{3} Ae^{-(3x+2y)} \Big|_{0}^{+\infty} \mathrm{d}y$$
$$= \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{3} Ae^{-2y} \mathrm{d}y = -\frac{1}{6} Ae^{-2y} \Big|_{0}^{+\infty} = \frac{1}{6} A = 1$$

所以常数 A 的值为 6。 □

(2) 分布函数 $F(x, y)$;

解 :

由题意可知，当 $x \leqslant 0$ 或 $y \leqslant 0$ 时，$F(x, y) = 0$。

当 $x > 0, y > 0$ 时，$F(x,y) = \int_0^y \int_0^x 6e^{-(3u+2v)} \mathrm{d}u \mathrm{d}v = \int_0^y -2e^{-(3u+2v)} \Big|_0^x \mathrm{d}v = \int_0^y \left(2e^{-2v} - 2e^{-(3x+2v)}\right) \mathrm{d}v = -e^{-2v}\Big|_0^y + e^{-(3x+2v)}\Big|_0^y = -e^{-2y} + 1 + e^{-(3x+2y)} - e^{-3x} = e^{-(3x+2y)} - e^{-3x} - e^{-2y} + 1$

所以

$$F(x,y) = \begin{cases} e^{-(3x+2y)} - e^{-3x} - e^{-2y} + 1, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

□

(3) 概率 $P(-2 < X \leqslant 2, -3 < Y \leqslant 3)$。

解 :

$$\begin{aligned} &P(-2 < X \leqslant 2, -3 < Y \leqslant 3) = P(X \leqslant 2, Y \leqslant 3) = F(2,3) \\ =& e^{-(3\times2+2\times3)} - e^{-3\times2} - e^{-2\times3} + 1 \\ =& 1 + e^{-12} - 2e^{-6} \end{aligned}$$

□