第二次作业

4.24 令 $\{e_t\}$ 为零均值、单位方差的白噪声过程。考虑起始于 $t=0$ 如下递归定义的过程：令 $Y_0=c_1e_0$, $Y_1=c_2Y_0+e_1$, 然后当 $t>1$ 时, 像 AR(2) 过程一样, 令 $Y_t=\phi_1Y_{t-1}+\phi_2Y_{t-2}+e_t$。

(a) 证明该过程的均值为零。

证明：

对于 $t>1$，$EY_t=\phi_1EY_{t-1}+\phi_2EY_{t-2}+Ee_t=\phi_1EY_{t-1}+\phi_2EY_{t-2}$,

$EY_0=c_1Ee_0=0,\quad EY_1=c_2EY_0+Ee_1=0,\quad EY_2=\phi_1EY_0+\phi_2EY_1=0,\quad \cdots$

进行归纳后可得知，对于任意 $t\geqslant 0$, $EY_t=0$，即该过程的均值为零。 $\square$

(b) 对位于 AR(2) 平稳域内的特殊值 ϕ_1 和 ϕ_2，该如何选择 c_1,c_2 使得 $\mathrm{Var}(Y_0)=\mathrm{Var}(Y_1)$，并且 Y_1 和 Y_0 之间的一阶滞后自相关系数符合参数为 ϕ_1 和 ϕ_2 的平稳 AR(2) 过程?

解：

首先计算 Y_0 和 Y_1 的方差，$\mathrm{Var}\,Y_0=\mathrm{Var}(c_1e_0)=c_1,\quad \mathrm{Var}\,Y_1=\mathrm{Var}(c_2Y_0+e_1)=c_2\,\mathrm{Var}\,Y_0+1=c_1c_2+1$,

再计算 Y_0 和 Y_1 的协方差, $\gamma_{0,1}=\mathrm{Cov}(Y_0,Y_1)=\mathrm{Cov}(c_1e_0,c_1c_2e_0+e_1)=c_1^2c_2\,\mathrm{Cov}(e_0,e_0)+c_1\,\mathrm{Cov}(e_0,e_1)=c_1^2c_2$,

再计算 Y_0 和 Y_1 的相关系数，$\rho_1=\frac{\mathrm{Cov}(Y_0,Y_1)}{\mathrm{Var}(Y_0)\,\mathrm{Var}(Y_1)}=\frac{c_1^2c_2}{c_1(c_1c_2+1)}=\frac{c_1c_2}{c_1c_2+1}$。

需要满足 $\begin{cases}\mathrm{Var}(Y_0)=\mathrm{Var}(Y_1)\\ \rho_1=\frac{\phi_1}{1-\phi_2}\end{cases}$, 即 $\begin{cases}c_1=c_1c_2+1\\ \frac{c_1c_2}{c_1c_2+1}=\frac{\phi_1}{1-\phi_2}\end{cases}$, 解得 $\begin{cases}c_1=\dfrac{1-\phi_2}{1-\phi_1-\phi_2}\\ c_2=\dfrac{\phi_1}{1-\phi_2}\end{cases}$

$\square$

(c) 一旦得到过程 $\{Y_t\}$, 那么如何将它转换成一个新的过程, 具有我们希望的均值和方差?(这个习题给出了一个模拟 AR(2) 过程的简便方法。)

解：

假设需要的均值为 μ，需要的方差为 σ。那么 $\{Y_t+\mu\}$ 的均值为所需的 μ。对于方差，则可以通过解方程组 $\begin{cases}\mathrm{Var}\,Y_0=c_1=\sigma\\ \mathrm{Var}\,Y_1=c_1c_2+1=\sigma\end{cases}$ 得到满足要求的 c_1,c_2。 $\square$

4.25 考虑 AR(1) 过程，满足 $Y_t = \phi Y_{t-1} + e_t$，其中 ϕ 为任意值，$\{e_t\}$ 是一个白噪声过程，并且 e_t 独立于过去值 $\{Y_{t-1}, Y_{t-2}, \cdots\}$。令 Y_0 为均值 μ_0、方差 σ_0^2 的随机变量。

(a) 证明当 $t > 0$ 时，可写成

$$Y_t = e_t + \phi e_{t-1} + \phi^2 e_{t-2} + \phi^3 e_{t-3} + \cdots + \phi^{t-1} e_1 + \phi^t Y_0$$

证明：

$$\begin{aligned} Y_t = \phi Y_{t-1} + e_t &= \phi(\phi Y_{t-2} + e_{t-1}) + e_t = \phi^2 Y_{t-2} + \phi e_{t-1} + e_t \\ &= \phi^2(\phi Y_{t-3} + e_{t-2}) + \phi e_{t-1} + e_t = \phi^3 Y_{t-3} + \phi^2 e_{t-2} + \phi e_{t-1} + e_t \\ &= \cdots \\ &= e_t + \phi e_{t-1} + \phi^2 e_{t-2} + \phi^3 e_{t-3} + \cdots + \phi^{t-1} e_t + \phi^t Y_0 \end{aligned}$$

□

(b) 证明：当 $t > 0$ 时，有 $E(Y_t) = \phi^t \mu_0$。

证明：

根据 **(a)**，$Y_t = e_t + \phi e_{t-1} + \phi^2 e_{t-2} + \phi^3 e_{t-3} + \cdots + \phi^{t-1} e_t + \phi^t Y_0$，所以

$$E(Y_t) = E(\phi^t Y_0) = \phi^t \mu_0$$

□

(c) 证明：当 $t > 0$ 时，

$$\operatorname{Var}(Y_t) = \begin{cases} \dfrac{1-\phi^{2t}}{1-\phi^2}\sigma_e^2 + \phi^{2t}\sigma_0^2, & \phi \neq 1 \\ t\sigma_e^2 + \sigma_0^2, & \phi = 1 \end{cases}$$

证明：

注意到 $e_t, e_{t-1}, e_{t-2}, \cdots e_1$ 独立同分布，方差均为 σ_e^2。

当 $\phi = 1$ 时，$Y_t = e_t + e_{t-1} + e_{t-2} + \cdots + e_1 + Y_0$，所以 $\operatorname{Var}(Y_t) = t\sigma_e^2 + \sigma_0^2$。

当 $\phi \neq 1$ 时，$\operatorname{Var} Y_t = \operatorname{Var} e_t + \operatorname{Var}(\phi e_{t-1}) + \operatorname{Var}(\phi^2 e_{t-2}) + \cdots + \operatorname{Var}(\phi^{t-1} e_1) + \operatorname{Var}(\phi^t Y_0) = \sigma_e^2 + \phi^2\sigma_e^2 + \phi^4\sigma_e^2 + \cdots + \phi^{2(t-1)}\sigma_e^2 + \phi^{2t}\sigma_0^2$，使用等比数列求和公式可知

$\operatorname{Var}(Y_t) = \dfrac{1-\phi^{2t}}{1-\phi^2}\sigma_e^2 + \phi^{2t}\sigma_0^2$。 □

(d) 假设 $\mu_0 = 0$，试证：如果 $\{Y_t\}$ 平稳，必定有 $\phi \neq 1$。

证明：

若 $\{Y_t\}$ 平稳，则方差 $\operatorname{Var} Y_t = \gamma_0$ 与 t 无关。所以 $\gamma_0 = \operatorname{Var} Y_t = \phi^2 \operatorname{Var} Y_{t-1} + \sigma_e^2 = \phi^2\gamma_0 + \sigma_e^2$，所以 $(1-\phi^2)\gamma_0 = \sigma_e^2$，因为 $\sigma_e^2 > 0$，所以 $1-\phi^2 \neq 0$，所以 $\phi \neq 1$。 □

(e) 仍假设 $\mu_0 = 0$，证明：如果 $\{Y_t\}$ 平稳，则 $\operatorname{Var}(Y_t) = \sigma_e^2/(1-\phi^2)$，因此必定有 $|\phi| < 1$。

证明：

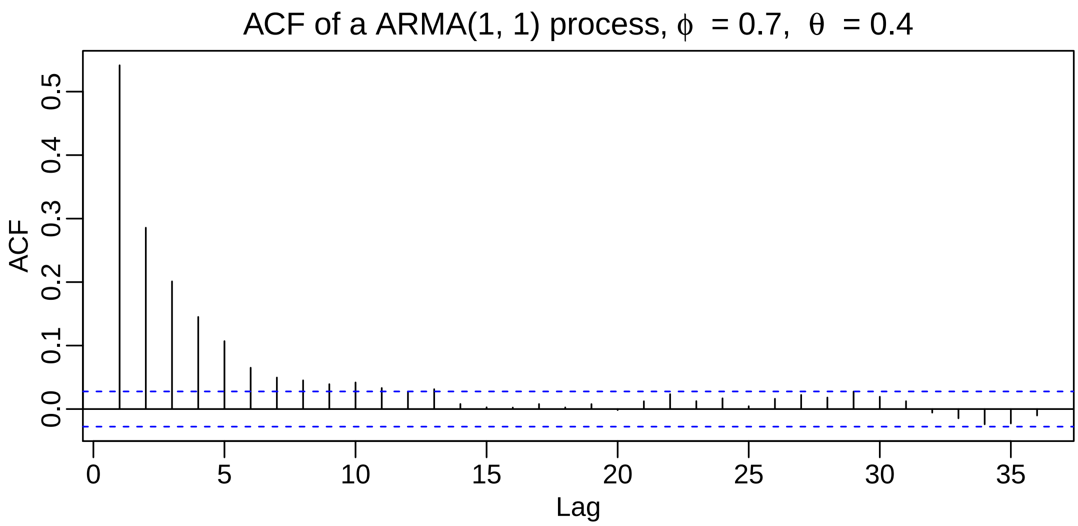
由 **(d)** 可知 $(1-\phi^2)\gamma_0 = \sigma_e^2$，且 $1-\phi^2 \neq 0$，所以 $\gamma_0 = \operatorname{Var} Y_t = \dfrac{\sigma_e^2}{1-\phi^2} > 0$，所以 $1-\phi^2 > 0$，可得 $|\phi| < 1$。 □

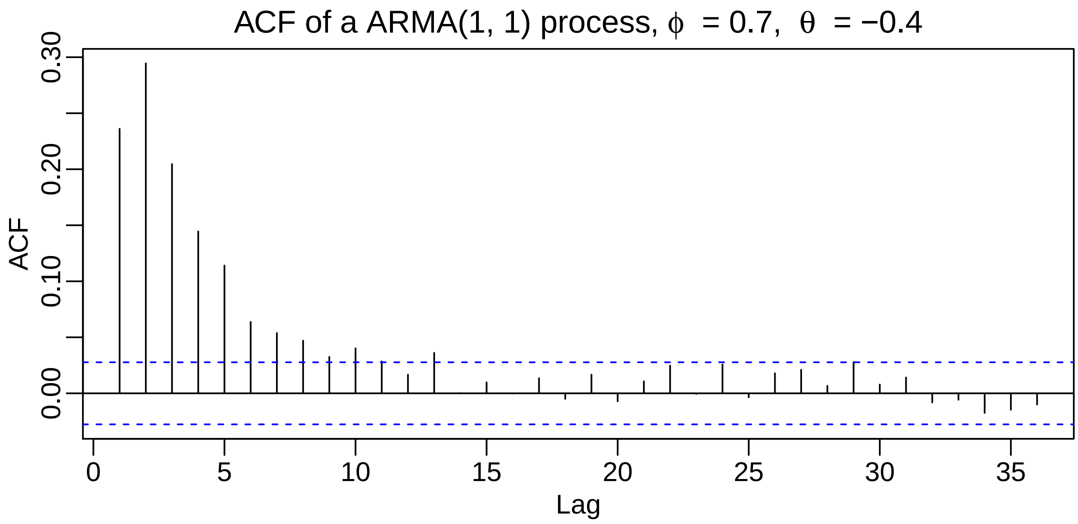
4.10 画出下列每个 ARMA 模型的自相关函数：

(a) ARMA(1, 1), $\phi = 0.7$, $\theta = 0.4$

(b) ARMA(1, 1), $\phi = 0.7$, $\theta = -0.4$

```r
w <- rnorm(5050, mean=0, sd=1)
pdf("1.pdf")
par(mfrow=c(2,1), mar=c(4,3,1.5,1.5), mgp=c(1.5, 0.5, 0))
ma <- filter(w, filter = c(1, 0.4), method = "convolution", sides = 1)[25:(length(w)-24)]
ar <- filter(w, filter = c(0.7), method = "recursive", sides = 1)[25:(length(w)-24)]
acf(ar + ma, main=expression(paste("ACF of a ARMA(1, 1) process, ", phi, "  = 0.7,  ", theta, "  =
↪  0.4")))
ma <- filter(w, filter = c(1, -0.4), method = "convolution", sides = 1)[25:(length(w)-24)]
ar <- filter(w, filter = c(0.7), method = "recursive", sides = 1)[25:(length(w)-24)]
acf(ar + ma, main=expression(paste("ACF of a ARMA(1, 1) process, ", phi, "  = 0.7,  ", theta, "  =
↪  -0.4")))
dev.off()
```





4.11 对 ARMA(1,2) 模型 $Y_t = 0.8Y_{t-1} + e_t + 0.7e_{t-1} + 0.6e_{t-2}$，证明

(a) 当 $k > 2$ 时，$\rho_k = 0.8\rho_{k-1}$

证明：

将 Y_t 减去期望 $\mu = EY_t$，则 $Y_t = 0.8Y_{t-1} + e_t + 0.7e_{t-1} + 0.6e_{t-2}$ 可写成

$$Y_t - \mu = 0.8(Y_{t-1} - \mu) + e_t + 0.7e_{t-1} + 0.6e_{t-2}$$

两边同时乘 $Y_{t-k} - \mu$ 并求期望，可得:

$$E[(Y_t - \mu)(Y_{t-k} - \mu)] = E[(Y_{t-k} - \mu)(0.8(Y_{t-1} - \mu) + e_t + 0.7e_{t-1} + 0.6e_{t-2})]$$

$$\gamma_k = 0.8\gamma_{k-1} + Ee_t(Y_{t-k} - \mu) + 0.7Ee_{t-1}(Y_{t-k} - \mu) + 0.6Ee_{t-2}(Y_{t-k} - \mu)$$

因为 $k > 2$，所以 Y_{t-k} 与 e_{t-2}, e_{t-1}, e_t 无关，所以 $Ee_tY_{t-k} = Ee_tEY_{t-k} = 0$，对 e_{t-1} 和 e_{t-2} 同理，所以

$$\gamma_k = 0.8\gamma_{k-1}$$

两边同时除以 $\gamma_0 = \mathrm{Var}(Y_t)$ 可得

$$\rho_k = 0.8\rho_{k-1}$$

□

(b) $\rho_2 = 0.8\rho_1 + 0.6\sigma_e^2/\gamma_0$

证明：

继续使用 **(a)** 中的

$$\gamma_k = 0.8\gamma_{k-1} + Ee_t(Y_{t-k}-\mu) + 0.7Ee_{t-1}(Y_{t-k}-\mu) + 0.6Ee_{t-2}(Y_{t-k}-\mu)$$

此时 $k=2$，可以证明 $Ee_tY_t = \sigma_e^2$，因此 $Ee_{t-2}Y_{t-2} = \sigma_e^2$，$E(e_{t-2}\mu) = 0$，而 Y_{t-2} 仍然与 e_t 和 e_{t-1} 无关，所以 $Ee_tY_{t-2} = 0$，$Ee_{t-1}Y_{t-2} = 0$，所以

$$\gamma_2 = 0.8\gamma_1 + 0.6\sigma_e^2$$

两边同时除以 $\gamma_0 = \mathrm{Var}(Y_t)$ 可得

$$\rho_2 = 0.8\rho_1 + 0.6\sigma_e^2/\gamma_0$$

□

4.22 证明陈述“$1-\phi_1x-\phi_2x^2-\cdots-\phi_px^p=0$ 的根的绝对值大于 1”等价于陈述“$x^p-\phi_1x^{p-1}-\phi_2x^{p-2}-\cdots-\phi_p=0$ 的根的绝对值小于 1”。(提示：如果 G 是一个方程的根，则 $1/G$ 是另一个方程的根。)

证明：

设 $1-\phi_1x-\phi_2x^2-\cdots-\phi_px^p=0$ 为方程①，$x^p-\phi_1x^{p-1}-\phi_2x^{p-2}-\cdots-\phi_p=0$ 为方程②，若 G 是方程①的根，则代入可得

$$1-\phi_1G-\phi_2G^2-\phi_2G^2-\cdots-\phi_pG^p=0$$

将上式除以 G^p

$$\frac{1}{G^p}-\phi_1\frac{1}{G}-\phi_2\frac{1}{G^2}-\cdots-\phi_p=0$$

观察后可以发现，上式说明 $\frac{1}{G}$ 是方程②的根。

因此若 G 的绝对值大于 1，则 $\frac{1}{G}$ 的绝对值小于 1。所以方程①的根的绝对值大于 1 等价于方程②的根的绝对值小于 1。 □

其他 考虑时间序列：$Y_t = 0.2Y_{t-1} + 0.63Y_{t-2} + e_t + 1.2e_{t-1} + 0.35e_{t-2}$，其中 e_t 是方差为 σ_e^2 的白噪声过程

(a) 如果该模型可以简化，请写出它的简化形式

解：

$$\begin{aligned}
Y_t - 0.2Y_{t-1} - 0.63Y_{t-2} &= e_t + 1.2e_{t-1} + 0.35e_{t-2} \\
(1 - 0.2B - 0.63B^2)Y_t &= (1 + 1.2B + 0.35B^2)e_t \\
(1 + 0.7B)(1 - 0.9B)Y_t &= (1 + 0.7B)(1 + 0.5B)e_t \\
(1 - 0.9B)Y_t &= (1 + 0.5B)e_t \\
Y_t - 0.9Y_{t-1} &= e_t + 0.5e_{t-1} \\
Y_t &= 0.9Y_{t-1} + e_t + 0.5e_{t-1}
\end{aligned}$$

即为简化形式。 □

(b) 这个过程可逆吗？平稳吗？

解：

观察 MA 部分的系数可以发现 $|\theta| < 1$，所以可逆。

观察 AR 部分的系数可以发现 $|\phi| < 1$，特征方程为 $1-0.9x = 0$，解为 $x = \frac{1}{0.9}$，$|x| > 1$，所以平稳。 □

(c) 如果平稳，转换成 MA(∞) 形式 $Y_t = e_t + \sum_{j=1}^{\infty} \Psi_j e_{t-j}$。写出 Ψ_j 的前四项和一般形式。

解：

$$\begin{aligned}
&Y_t = 0.9Y_{t-1} + e_t + 0.5e_{t-1} \\
&= 0.9(0.9Y_{t-2} + e_{t-1} + 0.5e_{t-2}) + e_t + 0.5e_{t-1} \\
&= 0.81Y_{t-2} + 0.9e_{t-1} + 0.45e_{t-2} + e_t + 0.5e_{t-1} \\
&= 0.81Y_{t-2} + e_t + 1.4e_{t-1} + 0.45e_{t-2} \\
&= 0.81(0.9Y_{t-3} + e_{t-2} + 0.5e_{t-3}) + e_t + 1.4e_{t-1} + 0.45e_{t-2} \\
&= \cdots \\
&= e_t + 1.4e_{t-1} + 1.26e_{t-2} + 1.134e_{t-3} + 1.0136e_{t-4} + 0.32405e_{t-5} + 0.58419Y_{t-5}
\end{aligned}$$

□