1. 抄写学习“9月27日讲稿-1，P7-P9”的“聚点定理及其证明”。（P9页第三行那句有误，需改！）

三、聚点定理：设$E \subset \mathbb{R}^n$为有界集，且E是无限集，那么E至少有一个聚点；

所谓E是有界集，是指：$\exists M > 0,$使$\forall \overrightarrow{x} \in E, \|\overrightarrow{x}\| \leq M$

证明：由于$E \subset \mathbb{R}^n$是无限集，我们可以找到各项互异的点列$\{x_k\}_{n=1}^{\infty} \subset E$

而E是有界集，于是$\{\overrightarrow{x_k}\}_{n=1}^{\infty}$有界；

据凝聚定理，$\{\overrightarrow{x_k}\}_{n=1}^{\infty}$有一个收敛的子列；

记该子列为$\{\overrightarrow{x_{k_\ell}}\}$并设$\lim\limits_{\ell \to \infty} \overrightarrow{x_{k_\ell}} = \overrightarrow{a}$;

那么由于$\{\overrightarrow{x_k}\}$各项互异，从而

$\{\overrightarrow{x_{k_\ell}}\}$各项互异，从而$\forall \ell \in \mathbb{N}^+, \overrightarrow{x_{k_\ell}} \neq \overrightarrow{a}$；（实在是不知道哪里有误）

于是据聚点的等价定义之一，可见$\overrightarrow{a}$是E的聚点。

2. 抄写学习“9月27日讲稿-1，P12-P20”的“闭集套定理及其证明”。

四、闭集套定理：

为此，我们需要定义$\mathbb{R}^n$中非空集的直径：

设$E \subset \mathbb{R}^n$，我们记$d(E) := \sup\{\|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\|\}$（当然，这里允许$\sup$为$+\infty$）

闭集套定理：

设$\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$是$\mathbb{R}^n$中的一列非空有界闭集，满足：

$(i) \forall k \in \mathbb{N}^+, D_{k+1} \subset D_k$;

$(ii) \lim\limits_{k \to \infty} d(D_k) = 0$

那么$\exists!\ \overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^n$，满足$\forall k \in \mathbb{N}^+, \overrightarrow{a} \in D_k$

证明：对每个$k\in\mathbb{N}^+$，任取定某$\overrightarrow{x_k}\in D_k$，

于是得到点列$\{\overrightarrow{x_k}\}_{k=1}^{\infty}\subset D_1,\{\overrightarrow{x_k}\}_{k=2}^{\infty}\subset D_2,\ldots$

即$\forall\ell\in\mathbb{N}^+,\{\overrightarrow{x_k}\}_{k=\ell}^{\infty}\subset D_\ell$

于是，$\forall k,\ell\in\mathbb{N}^+$(如果$k\leqslant\ell$)

那么$\overrightarrow{x_k}\in D_k,\overrightarrow{x_\ell}\in D_\ell\subset D_k$

从而$\|\overrightarrow{x_k}-\overrightarrow{x_\ell}\|\leqslant\sup\{\|\overrightarrow{x}-\overrightarrow{y}\|\mid\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}\in D_k\}=d(D_k)$

由于$\lim\limits_{k\to\infty}d(D_k)=0$,于是对任给定的$\varepsilon>0,\exists$某$K\in\mathbb{N}^+$，使

$\forall k\in\mathbb{N}^+$，只要$k>K$,就有$|d(D_k)|=d(D_k)<\varepsilon$

从而$\forall k,\ell\in\mathbb{N}^+$,只要$k>K,\ell\geqslant k>K$,就有

$\|\overrightarrow{x_k}-\overrightarrow{x_\ell}\|\leqslant d(D_k)<\varepsilon$

这说明$\{\overrightarrow{x_k}\}$是柯西列

据柯西准则，可知有某$\overrightarrow{a}\in\mathbb{R}^n$,使$\lim\limits_{n\to\infty}\overrightarrow{x_k}=\overrightarrow{a}$

由于$\{\overrightarrow{x_k}\}_{k=1}^{\infty}\subset D_1,D_1$是$\mathbb{R}^n$中的闭集，所以

$\overrightarrow{a}$作为D_1的聚点，必有$\overrightarrow{a}\in D_1$

同样，对每个$\ell\in\mathbb{N}^+$，$\{\overrightarrow{x_k}\}_{k=\ell}^{\infty}\subset D_\ell$

该点列$\{\overrightarrow{x_k}\}_{k=\ell}^{\infty}$同样收敛到$\overrightarrow{a}$

同样由于D_ℓ是$\mathbb{R}^n$中的闭集，$\overrightarrow{a}$作为D_ℓ的聚点必有$\overrightarrow{a}\in D_\ell$

于是我们证得了：

$\exists\overrightarrow{a}\in\mathbb{R}^n$,使$\forall\ell\in\mathbb{N}^+,\overrightarrow{a}\in D_\ell$

最后说明上述这样的$\overrightarrow{a}$是唯一的

用反证法，假设另有$\overrightarrow{b}\in\mathbb{R}^n,\overrightarrow{b}\neq\overrightarrow{a}$,满足$\forall\ell\in\mathbb{N}^+,\overrightarrow{b}\in D_\ell$

我们记$\alpha=\|\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}\|$,那么$\alpha>0$

由于$\lim\limits_{k\to\infty}d(D_k)=0$,对此$\alpha>0$,

$\exists$某$k_0\in\mathbb{N}^+$，使$d(D_{k_0})<\alpha$

但由于$\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\in D_{k_0}$，又有$\alpha=\|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\|\leqslant d(D_{k_0})<\alpha$，矛盾

3. 抄写学习“9月27日讲稿-1，P21及P27-35”的“有限覆盖定理”及其证明。

五、有限覆盖定理：

设$D\subset\mathbb{R}^n$是一个有界闭集，$\{A_j\}_{j\in\mathbb{J}}$是一族$\mathbb{R}^n$中的开集，满足$D\subset\bigcup\limits_{j\in\mathbb{J}}A_j$，

那么存在$\mathbb{J}$的某有限子集$\mathbb{K}$，使$D\subset\bigcup\limits_{j\in\mathbb{K}}A_j$

证明：用反证法，由于D是$\mathbb{R}^n$的有界闭集，

可寻找某$Q := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$

使$D \subset Q$, 记$\overrightarrow{a} = (a_1, \dots a_n), \overrightarrow{b} = (b_1, \dots b_n), d(Q) = \|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\|$

假设：$\forall \mathbb{K} \subset \mathbb{J}$, 如果$\mathbb{K}$是有限集，那么$D \not\subset \bigcup\limits_{j \in \mathbb{K}} A_j$

那么存在Q的二分子闭矩体Q_1，使

$\forall \mathbb{K} \subset \mathbb{J}$，如果$\mathbb{K}$是有限集，那么$D \cap Q_1 \not\subset \bigcup\limits_{j \in \mathbb{K}} A_j$

于是存在Q_1的二分子闭矩体Q_2，使

$\forall \mathbb{K} \subset \mathbb{J}$，如果$\mathbb{K}$是有限集，那么$D \cap Q_2 \not\subset \bigcup\limits_{j \in \mathbb{K}} A_j$

$\dots$

一般地，得Q_{k-1}的二分子闭矩体Q_k，使

$\forall \mathbb{K} \subset \mathbb{J}$，如果$\mathbb{K}$是有限集，那么$D \cap Q_k \not\subset \bigcup\limits_{j \in \mathbb{K}} A_j$

这样得到闭集套$\{D \cap Q_k\}_{k=1}^{\infty}$，满足$\forall k \in \mathbb{N}^+, D \cap Q_{k+1} \subset D \cap Q_k$

且$d(D \cap Q_k) \leqslant d(Q_k) = \dfrac{1}{2^k} \|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\| \xrightarrow{k \to \infty} 0$

于是存在唯一的$\overrightarrow{c} \in \mathbb{R}^n$

使$\forall k \in \mathbb{N}^+, \overrightarrow{c} \in D \cap Q_k$

但$\overrightarrow{c} \in D \subset \bigcup\limits_{j \in \mathbb{J}} A_j$

于是存在某$\tilde{j} \in \mathbb{J}$，使$\overrightarrow{c} \in A_{\tilde{j}}$

由$A_{\tilde{j}}$是$\mathbb{R}^n$中的开集, $\exists$某$\tilde{\delta} > 0$, 使$\overrightarrow{c} \in B(\overrightarrow{c}, \tilde{\delta}) \subset A_{\tilde{j}}$

注意到$\forall \overrightarrow{x} = (x_1, \dots x_n) \subset \mathbb{R}^n$

如果$|x_1 - c_1| < \dfrac{1}{\sqrt{n}} \tilde{\delta}, |x_2 - c_2| < \dfrac{1}{\sqrt{n}} \tilde{\delta}, \cdots, |x_n - c_n| < \dfrac{1}{\sqrt{n}} \tilde{\delta}$

那么$\overrightarrow{x} \in B(\overrightarrow{c}, \tilde{\delta})$

于是对$\dfrac{1}{2\sqrt{n}} \tilde{\delta} > 0$，由于

$d(D \cap Q_k) = \dfrac{1}{2^k} \|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\| \xrightarrow{k \to \infty} 0$

可找到某$k_0 \in \mathbb{N}^+$，使$d(D \cap Q_{k_0}) < \dfrac{1}{2\sqrt{n}} \tilde{\delta}$

从而$D \cap Q_{k_0} \subset B(\overrightarrow{c}, \tilde{\delta}) \subset A_{\tilde{j}}$

记$\tilde{\mathbb{K}} = \{\tilde{j}\}$，那么$\tilde{\mathbb{K}}$是有限集

记$\mathbb{K}=\{j\}$，那么$\mathbb{K}$是有限集

但$D\cap Q_{k_0}\subset A_{\tilde{j}}=\bigcup\limits_{j\in\mathbb{K}}A_j$

产生矛盾。

4. 抄写学习“9月27日讲稿-2，P10-P14”的“有界闭集上连续函数必有界”的证明。

定理（有界闭集上连续函数的有界性）

设$D\subset\mathbb{R}^n$非空，有界且是$\mathbb{R}^n$的闭集

那么$f:D\to\mathbb{R}$在D上有界

也即$f(D)=\{f(\overrightarrow{x})\mid\overrightarrow{x}\in D\}$是$\mathbb{R}$中有界集

也即：$\exists M>0,$使$\forall\overrightarrow{x}\in D,|f(\overrightarrow{x})|\leqslant M$

证明：用反证法，假设结论不成立

那么对每个$k\in\mathbb{N}^+$，及$M_k:=k$，

都有某$\overrightarrow{x_k}\in D$，使$|f(\overrightarrow{x_k})|\geqslant M_k=k$

于是$\{\overrightarrow{x_k}\}\subset D$，而$D$是有界集

据布尔扎诺 $-$ 魏尔斯特拉斯定理

存在$\{\overrightarrow{x_k}\}$的某子列$\{\overrightarrow{x_{k_\ell}}\}$及某$\overrightarrow{a}\in\mathbb{R}^n$，使$\lim\limits_{\ell\to\infty}\overrightarrow{x_{k_\ell}}=\overrightarrow{a}$

由于D是闭集，$\{\overrightarrow{x_{k_\ell}}\}\subset D$，可见$\overrightarrow{a}\in D$

可见$\lim\limits_{\ell\to\infty}f(\overrightarrow{x_{k_\ell}})=f(\overrightarrow{a})$

而另一方面，由$\forall\ell\in\mathbb{N}^+,|f(\overrightarrow{x_{k_\ell}})|\geqslant k_\ell\geqslant\ell$

可见$\lim\limits_{\ell\to\infty}f(\overrightarrow{x_{k_\ell}})=\infty$，矛盾

5. 抄写学习“9月27日讲稿-2，P15-P19”的“有界闭集上连续函数必能取得最大、最小值”的证明。

证明：设$D \subset \mathbb{R}^n$是有界闭集

据定理一，设$f : D \to \mathbb{R}$是D上连续函数，那么f在D上有界

因此记$M := \sup\{f(\overrightarrow{x}) \mid x \in D\}$

我们来证，存在某$\overrightarrow{x_0} \in D,$使$f(\overrightarrow{x_0}) = M$

用反证法，假设结论不成立

那么$\forall \overrightarrow{x} \in D, f(\overrightarrow{x}) < M$

那么可定义$g : D \to \mathbb{R}$如下：

$$\forall x \in D, g(\overrightarrow{x}) = \frac{1}{M - f(\overrightarrow{x})}$$

于是由连续的点列式等价定义，$g(\overrightarrow{x})$在D上连续

于是$g(\overrightarrow{x})$在D上有上界，记为$K > 0$

于是$\forall \overrightarrow{x} \in D, \dfrac{1}{M - f(\overrightarrow{x})} \leqslant K$

于是$\forall \overrightarrow{x} \in D, M - f(\overrightarrow{x}) \geqslant \dfrac{1}{K}$

于是$\forall \overrightarrow{x} \in D, f(\overrightarrow{x}) \leqslant M - \dfrac{1}{K} < M$

这与$M = \sup\{f(\overrightarrow{x}) \mid \overrightarrow{x} \in D\}$矛盾

同理可证，有某$\overrightarrow{y_0} \in D$，

使$f(\overrightarrow{y_0}) = \inf\{f(\overrightarrow{x}) \mid x \in D\}$

6. 抄写学习“9月27日讲稿-2，P29-P36”的“有界闭集上连续函数必定一致连续”的证明。

定理：（有界闭集上连续函数的一致连续性）

设$D \subset \mathbb{R}^n$非空，D是有界的闭集，

如果$f : D \to \mathbb{R}$在D上连续，那么f在D上一致连续

证明：假设结论不成立，那么有某$\varepsilon_0>0$，及$\{\overrightarrow{x_k}\},\{\overrightarrow{y_k}\}$，

虽然$\lim\limits_{k\to\infty}\|\overrightarrow{x_k}-\overrightarrow{y_k}\|=0$，

但对$\forall k\in\mathbb{N}^+,\left|f(\overrightarrow{x_k})-f(\overrightarrow{y_k})\right|\geqslant\varepsilon_0$

由于$\{\overrightarrow{x_k}\}\subset D$，故$\{\overrightarrow{x_k}\}$有界

从而由致密性定理，可知$\{\overrightarrow{x_k}\}$有某收敛点列$\{\overrightarrow{x_{k_\ell}}\}$，

记$\lim\limits_{\ell\to\infty}\overrightarrow{x_{k_\ell}}=\overrightarrow{x_0}$

由于D是闭集，可见$\overrightarrow{x_0}\in D$

另外，$\forall\ell\in\mathbb{N}^+,\left\|\overrightarrow{y_{k_\ell}}-\overrightarrow{x_0}\right\|$

$=\left\|\overrightarrow{y_{k_\ell}}-\overrightarrow{x_{k_\ell}}+\overrightarrow{x_{k_\ell}}-\overrightarrow{x_0}\right\|\leqslant\left\|\overrightarrow{y_{k_\ell}}-\overrightarrow{x_{k_\ell}}\right\|+\left\|\overrightarrow{x_{k_\ell}}-\overrightarrow{x_0}\right\|$

可见$\lim\limits_{\ell\to\infty}\left\|\overrightarrow{y_{k_\ell}}-\overrightarrow{x_0}\right\|=0$，也即

$\lim\limits_{\ell\to\infty}\overrightarrow{y_{k_\ell}}=\overrightarrow{x_0}$

注意到$\forall\ell\in\mathbb{N}^+,\varepsilon_0\leqslant\left|f(\overrightarrow{x_{k_\ell}})-f(\overrightarrow{y_{k_\ell}})\right|$

而由f在$\overrightarrow{x_0}$处连续性，$\lim\limits_{\ell\to\infty}f(\overrightarrow{x_{k_\ell}})=f(\overrightarrow{x_0})=\lim\limits_{\ell\to\infty}f(\overrightarrow{y_{k_\ell}})$

可见有某$\tilde{\ell}\in\mathbb{N}^+$，使

$\left|f(\overrightarrow{x_{k_{\tilde{\ell}}}})-f(\overrightarrow{x_0})\right|<\dfrac{\varepsilon_0}{2},\left|f(\overrightarrow{y_{k_{\tilde{\ell}}}})-f(\overrightarrow{x_0})\right|<\dfrac{\varepsilon_0}{2}$

从而$\left|f(\overrightarrow{x_{k_{\tilde{\ell}}}})-f(\overrightarrow{y_{k_{\tilde{\ell}}}})\right|<\varepsilon_0$

于是$\varepsilon_0\leqslant\left|f(\overrightarrow{x_{k_{\tilde{\ell}}}})-f(\overrightarrow{y_{k_{\tilde{\ell}}}})\right|<\varepsilon_0$

于是$1<1$，矛盾

7. 参照课本P75-P76及“9月27日讲稿-2，P23-P24”，写出讲稿-2，P23之事实一，也即“多元函数一致连续的点列式刻画”的详细证明。

函数$f:D\to\mathbb{R},D\subset\mathbb{R}^n$，试证$f$在$D$上一致连续的充要条件为：

对任何点列$\{\overrightarrow{x_k}\},\{\overrightarrow{y_k}\}\subset D$，若$\lim\limits_{n\to\infty}\left\|\overrightarrow{x_k}-\overrightarrow{y_k}\right\|=0$，则

$\lim\limits_{n\to\infty}[f(\overrightarrow{x_k})-f(\overrightarrow{y_k})]=0$

证明：必要性　　若f在D上一致连续，则$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0,$

$\forall \overrightarrow{x_k}, \overrightarrow{y_k} \in D, \left\| \overrightarrow{x_k} - \overrightarrow{y_k} \right\| < \delta$，则$\left| f(\overrightarrow{x_k}) - f(\overrightarrow{y_k}) \right| < \varepsilon$

设D上两个点列$\{\overrightarrow{x_k}\}, \{\overrightarrow{y_k}\}$，满足$\lim\limits_{n \to \infty} \left\| \overrightarrow{x_k} - \overrightarrow{y_k} \right\| = 0$，

于是对上述$\delta > 0, \exists N > 0, \forall k > N, \left\| \overrightarrow{x_k} - \overrightarrow{y_k} \right\| < \delta$

由一致连续性条件，有$\left| f(\overrightarrow{x_k}) - f(\overrightarrow{y_k}) \right| < \varepsilon$

即$\lim\limits_{k \to \infty} [f(\overrightarrow{x_k}) - f(\overrightarrow{y_k})] = 0$

充分性　　设对D上任意两个点列$\{\overrightarrow{x_k}\}$与$\{\overrightarrow{y_k}\}$，

若$\lim\limits_{k \to \infty} \left\| \overrightarrow{x_k} - \overrightarrow{y_k} \right\| = 0$，则有$\lim\limits_{k \to \infty} [f(\overrightarrow{x_k}) - f(\overrightarrow{y_k})] = 0$

现证f在D上一致连续

用反证法，若f在D上不一致连续，则

$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y},$满足$\left\| \overrightarrow{x} - \overrightarrow{y} \right\| < \delta$，但有$\left| f(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}) \right| \geqslant \varepsilon_0$

取$\delta_1 = 1, \exists \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1} \in D, \left\| \overrightarrow{x_1} - \overrightarrow{x_2} \right\| < 1$，有$\left| f(\overrightarrow{x_1}) - f(\overrightarrow{x_2}) \right| \geqslant \varepsilon_0$

取$\delta_2 = 2, \exists \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2} \in D, \left\| \overrightarrow{x_2} - \overrightarrow{y_2} \right\| < \dfrac{1}{2}$，有$\left| f(\overrightarrow{x_2}) - f(\overrightarrow{y_2}) \right| \geqslant \varepsilon_0$

$\dots\dots\dots\dots$

取$\delta_k = \dfrac{1}{k}, \exists \overrightarrow{x_k}, \overrightarrow{y_k} \in D, \left\| \overrightarrow{x_k} - \overrightarrow{y_k} \right\| < \dfrac{1}{k}$，有$\left| f(\overrightarrow{x_k}) - f(\overrightarrow{y_k}) \right| \geqslant \varepsilon_0$

$\dots\dots\dots\dots$

于是$\lim\limits_{k \to \infty} \left\| \overrightarrow{x_k} - \overrightarrow{y_k} \right\| = 0$，但是$\lim\limits_{k \to \infty} [f(\overrightarrow{x_k}) - f(\overrightarrow{y_k})] \neq 0$，

与所设条件矛盾

所以f在D上一致连续