

第三章 命题逻辑

3.1 命题

1. 下列语句哪些是命题？

(1) 2 是正数吗？

不是。

(2) $x^2 + x + 1 = 0$

是。

(3) 我要上学。

是。

(4) 明年 2 月 1 日下雨。

是。

(5) 如果股票涨了，那么我就赚钱。

是。

2. 将当当网的图书高级搜索符号化：<http://search.dangdang.com/AdvanceSearch/AdvanceSearch.aspx?c=0>

介质 = {} \wedge 书名 = {} \wedge 作者译者 = {} \wedge 关键词 = {} \wedge 出版社 = {} \wedge ISBN = {} \wedge 包装 = {}
 \wedge 分类 = {} \wedge {最低价格} \leq 价格 \leq {最高价格} \wedge {最低折扣} \leq 折扣 \leq {最高折扣}
 \wedge {最早出版时间} \leq 出版时间 \leq {最晚出版时间} \wedge 库存状态 = {}

3. 请将语句“除非你已满 16 周岁，否则只要你身高不足 1.2 米就不能乘公园的滑行铁道”符号化。

令 p : 你已满 16 周岁, q : 你身高足 1.2 米, r : 你能乘公园的滑行铁道。

命题符号化为: $\neg p \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg r)$

4. p 、 q 、 r 为如下命题:

p : 你得流感了

q : 你错过了最后的考试

r : 这门课你通过了

请用自然语言表达命题 $(p \rightarrow \neg r) \vee (q \rightarrow \neg r)$ 。

如果你得流感了，那么这门课你没通过，或者如果你错过了最后的考试，那么这门课你没通过。

5. 判断下列命题的真值:

(1) 若 $1 + 1 = 3$, 则 $2 + 2 = 4$

最外层的蕴含式的前件为假, 所以此命题的真值为1。

(2) 若鸟会飞, 则 $1 + 1 = 3$

在考虑例外的情况下 (\exists 不会飞的鸟类):

最外层的蕴含式的前件为假, 所以此命题的真值为1。

在不考虑例外的情况下:

最外层的蕴含式的前件为真, 但后件为假, 所以此命题的真值为0。

6. 构造一个只含命题变量 p 、 q 和 r 的命题公式 A , 满足: p 、 q 和 r 的任意一个赋值是 A 成真赋值当且仅当 p 、 q 和 r 中恰有两个为真

$$A = (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$$

3.2 等值演算

1. 将下列两个命题符号化, 并分别用真值表和等值演算的方法证明所得到的那两个命题公式是等值的。

(1) 你不会休息所以就不会工作, 你没有丰富的知识所以你就不会工作。

(2) 你会工作所以一定会休息并具有丰富的知识。

令 p : 你会休息, q : 你会工作, r : 你有丰富的知识

则(1)符号化为 $(\neg p \rightarrow \neg q) \wedge (\neg r \rightarrow \neg q)$

(2)符号化为 $q \rightarrow p \wedge r$

证明:

以下是真值表:

p	q	r	$(\neg p \rightarrow \neg q) \wedge (\neg r \rightarrow \neg q)$	$q \rightarrow p \wedge r$
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

以下是等值演算:

$$\begin{aligned} (\neg p \rightarrow \neg q) \wedge (\neg r \rightarrow \neg q) &= (p \vee \neg q) \wedge (r \vee \neg q) \\ &= (p \wedge r) \vee \neg q \\ &= \neg q \vee (p \wedge r) \\ &= q \rightarrow p \wedge r \end{aligned}$$

所以 $(\neg p \rightarrow \neg q) \wedge (\neg r \rightarrow \neg q)$ 与 $q \rightarrow p \wedge r$ 等值。

□

2. 用等值演算的方法证明命题恒等式 $p \rightarrow (q \rightarrow p) = \neg p \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$

证明：

$$\begin{aligned} \neg p \rightarrow (p \rightarrow \neg q) &= p \vee (p \rightarrow \neg q) \\ &= p \vee (\neg p \vee \neg q) \\ &= \neg p \vee \neg q \vee p \\ &= p \rightarrow (\neg q \vee p) \\ &= p \rightarrow (q \rightarrow p) \end{aligned}$$

□

3. 一教师要从 3 名学生 A、B 和 C 中选派 1~2 人参加市级科技竞赛，需满足以下条件：

- (1) 若 A 去，则 C 同去；
- (2) 若 B 去，则 C 不能去；
- (3) 若 C 不去，则 A 或 B 可以去。

问该如何选派？

令 a : A 去, b : B 去, c : C 去

$$\begin{aligned} \text{则需满足: } & (a \rightarrow c) \wedge (b \rightarrow \neg c) \wedge (\neg c \rightarrow a \vee b) \wedge \neg(a \wedge b \wedge c) \\ &= (\neg a \vee c) \wedge (\neg b \vee \neg c) \wedge (c \vee (a \vee b)) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee \neg c) \\ &= (\neg a \vee c) \wedge (\neg b \vee \neg c) \wedge (a \vee b \vee c) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee \neg c) \\ &= (\neg a \vee \neg b \vee c) \wedge (\neg a \vee b \vee c) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee \neg c) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg c) \wedge (a \vee b \vee c) \\ &= \bigwedge M(0, 3, 4, 6, 7) \\ &= \bigvee m(1, 2, 5) \\ &= (\neg a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg b \wedge c) \end{aligned}$$

即选派 C 或选派 B 或选派 AC。