5.4 等价关系和划分

1. 设 X 是所有人组成的集合，如下定义的关系哪些是 X 上的等价关系?

(1) $\{(a,b)\|$a 是 b 的兄弟$\}$	不是
(2) $\{(a,b)\|$a 与 b 的年龄相差不超过 3 岁$\}$	不是
(3) $\{(a,b)\|$a 和 b 有相同的祖父$\}$	是
(4) $\{(a,b)\|$a 与 b 相识$\}$	不是
(5) $\{(a,b)\|$a 与 b 会说同一种语言$\}$	是

2. 若 R_1 和 R_2 是 X 上的等价关系，则 X^2-R_1、R_1-R_2、R_1^2、$t(R_1\cup R_2)$ 是否也都是 X 上的等价关系？为什么?

解：

$\because \forall x\in X,(x,x)\in R_1 \quad \therefore (x,x)\notin X^2-R_1 \quad \therefore X^2-R_1$不是$X$上的等价关系；

$\because X^2$是X上的等价关系 $\quad \therefore$ 若取$R_1=X^2$，则R_1-R_2不是X上的等价关系；

若取$R_2=\varnothing$，则R_1-R_2是X上的等价关系；

$\therefore R_1-R_2$不一定是X上的等价关系

$R_1^2=R_1$，是X上的等价关系

$\forall x\in X$，$(x,x)\in R_1\subseteq R_1\cup R_2\subseteq t(R_1\cup R_2) \quad \therefore t(R_1\cup R_2)$是自反关系

由上一节的例题可知，对称关系的并也是对称关系，对称关系的传递闭包也是对称关系

$\therefore t(R_1\cup R_2)$是对称关系

$t(R_1\cup R_2)$是传递闭包，所以是传递关系

因此，$t(R_1\cup R_2)$是X上的等价关系

□

3. 设 $X=\{(x,y)|$x 和 y 是不为零的实数$\}$，E 是 X 上的关系：$(x_1,y_1)E(x_2,y_2)$ 当且仅当 $\dfrac{y_1}{x_1}=\dfrac{y_2}{x_2}$ 且 $x_1\cdot x_2>0$。证明 E 是 X 上的等价关系，并给出 $[(x,y)]_E$ 的几何解释。

证明：

$\forall (x,y)\in X$，则$x\neq 0,y\neq 0 \quad \therefore x\cdot x=x^2>0,\dfrac{y}{x}=\dfrac{y}{x} \quad \therefore (x,y)E(x,y)$，即$E$是自反关系

$\forall ((x_1,y_1),(x_2,y_2))\in E$，即$x_1\cdot x_2>0,\dfrac{y_1}{x_1}=\dfrac{y_2}{x_2}$，则$x_2\cdot x_1>0,\dfrac{y_2}{x_2}=\dfrac{y_1}{x_1}$

$\therefore ((x_2,y_2),(x_1,y_1))\in E$，即$E$是对称关系

$\forall ((x_1,y_1),(x_2,y_2)),((x_2,y_2),(x_3,y_3))\in E$，即$x_1\cdot x_2>0,x_2\cdot x_3>0,\dfrac{y_1}{x_1}=\dfrac{y_2}{x_2},\dfrac{y_2}{x_2}=\dfrac{y_3}{x_3}$

$\therefore x_1\cdot x_3>0,\dfrac{y_1}{x_1}=\dfrac{y_3}{x_3} \quad \therefore ((x_1,y_1),(x_3,y_3))\in E$，即$E$是传递关系

$\therefore E$是X上的等价关系

$[(x,y)]_E$表示从原点出发并经过(x,y)的某一条射线去除原点

□

4. 下面哪些 $\mathbb{Z}$ 的子集簇构成 $\mathbb{Z}$ 的划分？为什么？

(1) {偶数集, 奇数集}

$$\begin{aligned}&\text{构成，令}\pi=\{\text{偶数集,奇数集}\}\text{，则偶数集}\neq\varnothing\text{，奇数集}\neq\varnothing\\&\text{偶数集}\cap\text{奇数集}=\varnothing,\quad\text{偶数集}\cup\text{奇数集}=\mathbb{Z}\\&\therefore\{\text{偶数集,奇数集}\}\text{构成}\mathbb{Z}\text{的划分}\end{aligned}$$

(2) {正整数集, 负整数集}

$$\text{不构成，}\because 0\in\mathbb{Z}\text{，但}0\notin\text{正整数集}\cup\text{负整数集，即正整数集}\cup\text{负整数集}\neq\mathbb{Z}$$

(3) {能被 3 整除的整数的集合, 被 3 除余数为 1 的整数的集合, 被 3 除余数为 2 的整数的集合}

$$\text{构成，因为任何一个整数除以3的余数只能是0或1或2.}$$

(4) {小于-100 的整数的集合, 绝对值不超过 100 的整数的集合, 大于 100 的整数的集合}

$$\text{构成，任何一个整数必然在且只在这三个集合中的某一个集合中。}$$

(5) {不能被 3 整除的整数的集合, 偶数集合, 被 6 除余数为 3 的整数的集合}

$$\begin{aligned}&\text{不构成，}\because 2\in\text{不能被3整除的整数的集合}\cap\text{偶数集合，}\\&\text{即不能被3整除的整数的集合}\cap\text{偶数集合}\neq\varnothing\end{aligned}$$

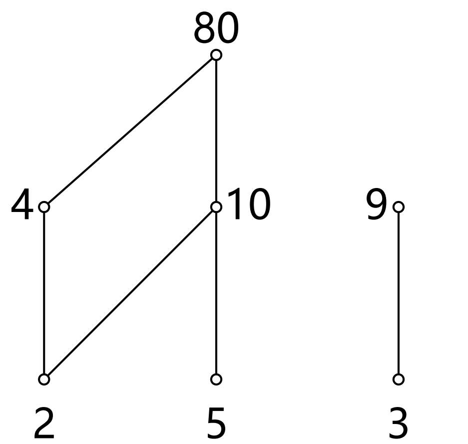
5.5 偏序关系

1. 下列集合关于整除关系 | 构成偏序集。请分别画出它们的哈斯图，判断它们是否是全序集，给出它们的极大元、极小元、最大元、最小元。

(1) $\{2,4,8,16\}$；

极大元：16，极小元：2；
最大元：16，最小元：2。

(2) $\{2,3,4,5,9,10,80\}$。



极大元：80、9，极小元：2、5、3；
最大元：无，最小元：无。

2. 证明:

(1) 偏序集的最小元也必定是其极小元;

证明 :

对于任意的偏序集$(X,\leqslant)$，若$a\in X$是它的最小元，取个体域为X

则$\forall x(a\leqslant x)$

$\because$ 偏序关系具有反对称性，

$\therefore \forall x((x=a)\vee\neg(x\leqslant a))$

$\therefore \forall x(\neg(x\neq a\wedge x\leqslant a))$

$\therefore \neg\exists x(x<a)$

$\therefore a$是$(X,\leqslant)$的极小元

□

(2) 任意全序集至多只有一个极小元，即全序集的极小元是唯一的。

证明 :

对于任意的全序集$(X,\leqslant)$，假设$a,b\in X$都是它的极小元，取个体域为X

则$\neg\exists x(x<a)\wedge\neg\exists y(y<b)$

$\therefore \forall x(\neg(x<a))\wedge\forall y(\neg(y<b))$

$\therefore \neg(b<a)\wedge\neg(a<b)$

$\because (X,\leqslant)$是全序集

$\therefore a\leqslant b\wedge b\leqslant a$

$\therefore a=b$

因此，全序集的极小元是唯一的。

□

3. 设 R 是 X 上自反、传递的关系，$S=R\cap R^{-1}$。

(1) 证明 S 是 X 上的等价关系。

证明 :

$\forall x\in X,(x,x)\in R \quad \therefore (x,x)\in R^{-1} \quad \therefore (x,x)\in R\cap R^{-1}=S$，即$S$是自反关系

$\forall(x,y)\in S$，即$(x,y)\in R\wedge(x,y)\in R^{-1} \quad \therefore (y,x)\in R^{-1}\wedge(y,x)\in R$

$\therefore (y,x)\in R\cap R^{-1}=S$，即$S$是对称关系

$\forall(x,y),(y,z)\in S$，即$(x,y)\in R\wedge(x,y)\in R^{-1}\wedge(y,z)\in R\wedge(y,z)\in R^{-1}$

$\therefore (x,y)\in R\wedge(y,z)\in R, \quad (y,x)\in R\wedge(z,y)\in R$

$\therefore (x,z)\in R,(z,x)\in R$

$\therefore (x,z)\in R,(x,z)\in R^{-1}$，即$(x,z)\in R\cap R^{-1}=S$，即$S$是传递关系

因此，S是X上的等价关系。

□

(2) 在 X/S 上定义关系 $T:([x]_S,[y]_S)\in T$ 当且仅当 $(x,y)\in R$。证明 T 是 X/S 上的偏序关系。

证明：

$\forall [x]_S \in X/S,$ 则$x\in X \quad \because R$是X上的自反关系 $\quad \therefore (x,x)\in R$

$\therefore ([x]_S,[x]_S)\in T$，即$T$是自反关系

$\forall([x]_S,[y]_S)\in T$，即$(x,y)\in R$，若$[x]_S\neq[y]_S$，则$(x,y)\notin S$

$\therefore (x,y)\notin R \vee (x,y)\notin R^{-1}$

$\because (x,y)\in R \quad \therefore (x,y)\notin R^{-1} \quad \therefore (y,x)\notin R$

$\therefore ([y]_S,[x]_S)\notin T$，即$T$是反对称关系

$\forall([x]_S,[y]_S),([y]_S,[z]_S)\in T$，即$(x,y)\in R,(y,z)\in R$

$\because R$是X上的传递关系 $\quad \therefore (x,z)\in R$

$\therefore ([x]_S,[z]_S)\in R$，即$T$是传递关系

因此，T是X/S上的偏序关系。

□