第八章　假设检验

8.1　假设检验的基本思想与概念

1. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是来自 $N(\mu, 1)$ 的样本，考虑如下假设检验问题

$$H_0: \mu = 2 \quad \text{vs} \quad H_1: \mu = 3,$$

若检验由拒绝域为 $W = \{\bar{x} \geqslant 2.6\}$ 确定。

(1) 当 $n = 20$ 时求检验犯两类错误的概率;

解：

第一类错误：$\alpha = P(\bar{x} \geqslant 2.6 | H_0)$，当 H_0 成立即 $\mu = 2$ 时 $\bar{x} \sim N\left(2, \frac{1}{20}\right)$，所以

$$\alpha = P\left(\frac{\bar{x} - 2}{\sqrt{\frac{1}{20}}} \geqslant \frac{2.6 - 2}{\sqrt{\frac{1}{20}}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{2.6 - 2}{\sqrt{\frac{1}{20}}}\right) = 0.0036452$$

```
R((2.6-2)⌟√(1⌟20)
              0.0036452
```

第二类错误：$\beta = P(\bar{x} < 2.6 | H_1)$，当 H_1 成立即 $\mu = 3$ 时 $\bar{x} \sim N\left(3, \frac{1}{20}\right)$，所以

$$\beta = P\left(\frac{\bar{x} - 3}{\sqrt{\frac{1}{20}}} < \frac{2.6 - 3}{\sqrt{\frac{1}{20}}}\right) = \Phi\left(\frac{2.6 - 3}{\sqrt{\frac{1}{20}}}\right) = 0.036819$$

```
P((2.6-3)⌟√(1⌟20)
               0.036819
```

□

(2) 如果要使得检验犯第二类错误的概率 $\beta \leqslant 0.01$，n 最小应取多少?

解：

$$\beta = P(\bar{x} < 2.6 | H_1) = P\left(\frac{\bar{x}-3}{\sqrt{\frac{1}{n}}} < \frac{2.6-3}{\sqrt{\frac{1}{n}}}\right) \leqslant 0.01$$

即 $\Phi\left(\frac{-0.4}{\sqrt{\frac{1}{n}}}\right) \leqslant 0.01$，即 $\Phi\left(\frac{0.4}{\sqrt{\frac{1}{n}}}\right) \geqslant 0.99$，即 $\frac{0.4}{\sqrt{\frac{1}{n}}} \geqslant 2.33$，解得 $n \geqslant 33.930625$，所以 n 最小应取 34. □

(3) 证明：当 $n \to \infty$ 时，$\alpha \to 0, \beta \to 0$。

证明：

$$\alpha = P\left(\frac{\bar{x}-2}{\sqrt{\frac{1}{n}}} \geqslant \frac{2.6-2}{\sqrt{\frac{1}{n}}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{0.6}{\sqrt{\frac{1}{n}}}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\beta = P\left(\frac{\bar{x}-3}{\sqrt{\frac{1}{n}}} < \frac{2.6-3}{\sqrt{\frac{1}{n}}}\right) = \Phi\left(\frac{-0.4}{\sqrt{\frac{1}{n}}}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

□

3. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_{16}$ 是来自正态总体 $N(\mu, 4)$ 的样本，考虑检验问题

$$H_0: \mu = 6 \quad \text{vs} \quad H_1: \mu \neq 6$$

拒绝域取为 $W = \{|\bar{x} - 6| \geqslant c\}$，试求 c 使得检验的显著性水平为 0.05，并求该检验在 $\mu = 6.5$ 处犯第二类错误的概率。

解：

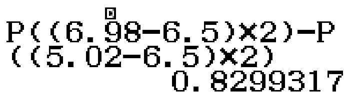
当 H_0 成立即 $\mu = 6$ 时，$\bar{x} \sim N(\mu, \frac{4}{16}) = N(6, \frac{1}{4})$，所以

$$p = P\left(|\bar{x} - 6| \geqslant c | \mu = 6\right) = P\left(\frac{|\bar{x}-6|}{\frac{1}{2}} \geqslant 2c \middle| \mu = 6\right) = 2(1 - \Phi(2c)) = 0.05$$

则 $\Phi(2c) = 0.975$，所以 $2c = 1.96$，从而 $\boldsymbol{c = 0.98}$。

当 $\mu = 6.5$ 时，$\bar{x} \sim N(6.5, 0.25)$，所以该检验在 $\mu = 6.5$ 处犯第二类错误的概率为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta} &= P\left(|\bar{x} - 6| < c \mid \mu = 6.5\right) = P\left(5.02 < \bar{x} < 6.98\right) \\ &= P\left(\frac{5.02-6.5}{0.5} < \bar{x} < \frac{6.98-6.5}{0.5}\right) = \Phi\left(\frac{6.98-6.5}{0.5}\right) - \Phi\left(\frac{5.02-6.5}{0.5}\right) \boldsymbol{= 0.8299317}\end{aligned}$$



□

4. 设总体为均匀分布 $U(0,\theta)$，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是样本，考虑检验问题

$$H_0:\theta\geqslant 3 \quad \text{vs} \quad H_1:\theta<3,$$

拒绝域取为 $W=\{x_{(n)}\leqslant 2.5\}$，求检验犯第一类错误的最大值 α，若要使得该最大值 α 不超过 0.05，n 至少应取多大?

解：

$x_{(n)}$ 的密度函数为 $f_n(x)=\frac{nx^{n-1}}{\theta^n}1_{(0,\theta)}(x)$，所以检验犯第一类错误的概率为

$$\alpha'=P(x_{(n)}\leqslant 2.5|H_0)=P(x_{(n)}\leqslant 2.5|\theta\geqslant 3)=\int_0^{2.5}\frac{nx^{n-1}}{\theta^n}\mathrm{d}x=\left(\frac{5}{2}\right)^n\theta^{-n}$$

当 θ 取 3 时 α' 取到最大值 $\boldsymbol{\alpha}=\left(\frac{5}{2}\right)^n3^{-n}=\boldsymbol{\left(\frac{6}{5}\right)^{-n}}$，而 $\alpha=\left(\frac{6}{5}\right)^{-n}=0.05$ 解得 $n=-\frac{\ln(20)}{-\ln(6)+\ln(5)}=16.4310371534373$，所以 n 至少应取 **17**。 □

8. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_{30}$ 为取自泊松分布 $P(\lambda)$ 的随机样本。

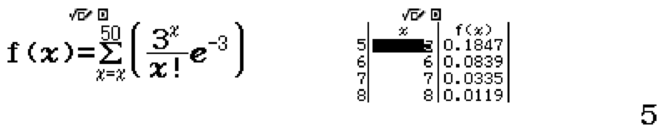
(1) 试给出单侧假设检验问题 $H_0:\lambda\leqslant 0.1$ vs $H_1:\lambda>0.1$ 的显著性水平 $\alpha=0.05$ 的检验；

由于泊松分布关于参数 λ 具有可加性，所以 $\sum_{k=1}^n x_k\sim P(30\lambda)$，所以选取 $\sum_{k=1}^n x_k$ 作为统计量，设拒绝域为 W，则

$$P(W|H_0)=P(W|\lambda\leqslant 0.1)=\sum_{k=c}^{\infty}\frac{(30\lambda)^k}{k!}e^{-30\lambda}\leqslant 0.05$$

当 λ 越大则犯第一类错误的概率越大，所以此时 λ 可以取 0.1，则

$$\sum_{k=c}^{\infty}\frac{(30\lambda)^k}{k!}e^{-30\lambda}=\sum_{k=c}^{\infty}\frac{3^k}{k!}e^{-3}$$

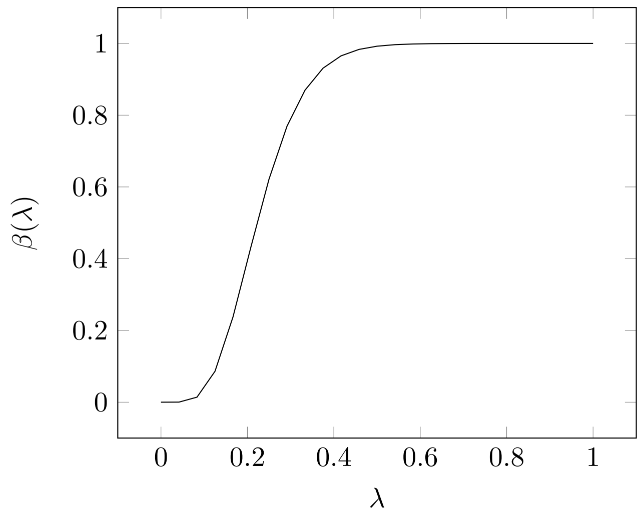


（图中的 50 可以为任何较大的自然数）可以看到当 c 取 6 时上式大于 0.05，当 c 取 7 时上式小于 0.05，所以所求检验的拒绝域为 $W=\left\{\sum_{k=1}^{30}x_k\geqslant 7\right\}$。

(2) 求此检验的势函数 $\beta(\lambda)$ 在 $\lambda=0.05,0.2,0.3,\cdots,0.9$ 时的值，并据此画出 $\beta(\lambda)$ 的图像。

$$\begin{aligned}\beta(\lambda)&=P_\lambda\left(\sum_{k=1}^{30}x_i\geqslant 7\right)=\sum_{k=7}^{\infty}\frac{(30\lambda)^k}{k!}e^{-30\lambda}\\&=(-1012500\lambda^6-202500\lambda^5-33750\lambda^4-4500\lambda^3-450\lambda^2-30\lambda+e^{30\lambda}-1)e^{-30\lambda}\end{aligned}$$

使用 LaTeX 的 pgfplots 宏包画图如下:



8.2 正态总体参数假设检验

说明：本节习题均采用拒绝域的形式完成，在可以计算检验的 p 值时要求计算出 p 值。

1. 有一批枪弹，出厂时，其初速率 $v \sim N(950, 100)$（单位：m/s）。经过较长时间储存，取 9 发进行测试，得样本值（单位：m/s）如下：

$$914 \quad 920 \quad 910 \quad 934 \quad 953 \quad 945 \quad 912 \quad 924 \quad 940$$

据经验，枪弹经储存后其初速率仍服从正态分布，且标准差保持不变，问是否可以认为这批枪弹的初速率有显著降低（$\alpha = 0.05$)?

解：

设总体的均值为 μ，则待检验的原假设 H_0 和备选假设 H_1 分别为

$$H_0 : \mu = 950 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu < 950$$

拒绝域为 $\{u \leqslant u_\alpha\}$，即 $\left\{\frac{\bar{x}-950}{10/3} \leqslant u_{0.05}\right\}$ 即 $\left\{\bar{x} \leqslant -1.645 \times \frac{10}{3} + 950 \approx 944.5167\right\}$。

根据样本计算得出 $\bar{x} = 928$，在拒绝域内，因此可以认为这批枪弹的初速率有显著降低。

再计算 p 值，

$$p = \Phi\left(\frac{928 - 950}{10/3}\right) = \mathbf{2.0665 \times 10^{-11}} < 0.05$$

□

5. 设需要对某正态总体的均值进行假设检验

$$H_0 : \mu = 15 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu < 15$$

已知 $\sigma^2 = 2.5$，取 $\alpha = 0.05$，若要求当 H_1 中的 $\mu \leqslant 13$ 时犯第二类错误的概率不超过 0.05，求所需的样本容量。

解：

由于已知 $\sigma^2=2.5$，所以拒绝域为 $\left\{\frac{\bar{x}-15}{\sqrt{2.5/n}}\leqslant u_{0.05}\right\}$

$$\beta=P\left(\frac{\bar{x}-15}{\sqrt{2.5/n}}>u_{0.05}\middle|\mu\leqslant 13\right)\leqslant 0.05$$

其中

$$P\left(\frac{\bar{x}-15}{\sqrt{2.5/n}}>u_{0.05}\right)=P\left(\frac{\bar{x}-\mu+\mu-15}{\sqrt{2.5/n}}>u_{0.05}\right)=P\left(\frac{\bar{x}-\mu}{\sqrt{2.5/n}}>u_{0.05}+\frac{15-\mu}{\sqrt{2.5/n}}\right)$$
$$=1-\Phi\left(-1.645+\frac{15-\mu}{\sqrt{2.5/n}}\right)\leqslant 0.05$$

所以 $\Phi\left(-1.645+\frac{15-\mu}{\sqrt{2.5/n}}\right)\geqslant 0.95$，从而 $-1.645+\frac{15-\mu}{\sqrt{2.5/n}}\geqslant 1.645$ 需要在 $\mu\leqslant 13$ 时成立，由于左侧关于 μ 递减，所以当 $\mu=13$ 时，解 $-1.645+\frac{15-13}{\sqrt{2.5/n}}=1.645$ 可得 $n=6.7650625$，所以所需的样本容量至少为 **7**。

□

6. 从一批钢管中抽取 10 根，测得其内径（单位：mm）为

100.36　100.31　99.99　100.11　100.64　100.85　99.42　99.91　99.35　100.10

设这批钢管内径服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，试分别在下列条件下检验假设（$\alpha=0.05$）：

$$H_0:\mu=100\quad \text{vs}\quad H_1:\mu>100$$

(1) 已知 $\sigma=0.5$；

解：

拒绝域为 $\left\{\frac{\bar{x}-100}{0.5/\sqrt{10}}\geqslant u_{1-\alpha}\right\}=\left\{\bar{x}\geqslant u_{0.95}\times 0.5\sqrt{10}+100\right\}=\{\bar{x}\geqslant 102.60\}$

根据样本计算得出 $\bar{x}=100.104$，不在拒绝域中，所以不能拒绝原假设。

再计算 p 值，

$$p=1-\Phi\left(\frac{100.104-100}{0.5}\right)=\mathbf{0.082385}>0.05$$

□

(2) σ 未知。

解：

拒绝域为

$$\left\{\frac{\bar{x}-100}{s/\sqrt{10}}\geqslant t_{0.95}(9)\right\}=\left\{\frac{\bar{x}-100}{s/\sqrt{10}}\geqslant 1.8331\right\}$$

根据样本计算得出 $\bar{x} = 100.104, s = 0.4759598489$，所以 $\frac{\bar{x}-100}{s/\sqrt{10}} = 0.690976092663247$ 不在拒绝域内，所以不能拒绝原假设。

再计算 p 值，

$$p = P_{t\sim t(9)}\left(t \geqslant 0.690976092663247\right) > 1 - 0.7027 = \mathbf{0.2973} > 0.05$$

$\square$