6.2 集合的基数

1. 集合 $\{x \mid x \in \mathbb{Z}, \text{且}x\text{不能被 3 整除}\}$ 是否是可数集？若是，则给出自然数集 $\mathbb{N}$ 与它之间的一个一一对应。

解：

将给定的集合记为 A，它是可数集。

给出一一对应的函数如下：

$$f\colon \mathbb{N} \to A, x \mapsto \begin{cases} (-1)^{\lfloor \frac{x}{2} \rfloor} \times 3 \left\lfloor \dfrac{x+2}{4} \right\rfloor + 1, & x\text{为偶数}, x \geqslant 0 \\ (-1)^{\lfloor \frac{x}{2} \rfloor} \times 3 \left\lfloor \dfrac{x+2}{4} \right\rfloor + 2, & x\text{为奇数}, x \geqslant 0 \end{cases}$$

□

2. 设集合族 $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 和 $\{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 中的集合都是两两不相交的（$i \neq j$ 时 $A_i \cap A_j = \varnothing$，$B_i \cap B_j = \varnothing$），且对任意 $n \in \mathbb{N}$，$A_n \sim B_n$。请证明 $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n \sim \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} B_n$。

证明：

对于 $\forall n \in \mathbb{N}$，$A_n \sim B_n$，所以存在一一对应的 $f_n : A_n \to B_n$。

那么可以定义 f 如下：

$$f\colon \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \to \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n, x \mapsto \begin{cases} f_1(x), & x \in A_1 \\ f_2(x), & x \in A_2 \\ \cdots, & \cdots \\ f_n(x), & x \in A_n \end{cases}$$

因为 $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 两两不相交，所以 f 是一个函数，下面证明 f 是一一对应的。

对于任意的 $y \in \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} B_n$，由于 $\{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 两两不相交，则必定存在唯一的 $i \in \mathbb{N}$ 使得 $y \in B_i$，而 $f_i : A_i \to B_i$ 是一一对应的，所以必定存在唯一的 $x \in A_i \subseteq \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$ 使得 $f(x) = y$，因此 f 是一一对应的。

由于构造出了 $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$ 和 $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} B_i$ 之间的一一对应的函数，所以 $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n \sim \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} B_n$。

□

3. 设 F 是 X 到 Y 的所有函数所组成的集合，$F = \{f \mid f : X \to Y\}$，$|X| = n$。证明 $F \sim Y^n$。

证明：

对于 $\forall f \in F$，f 都唯一对应于一个 $|X|$ 行 $|Y|$ 列的关系矩阵，并且每行有且仅有一个 1。那么每一行这个 1 的位置有 $|Y|$ 种情况，一共有 $|X|$ 行，所以一共有 $|Y|^{|X|} = |Y|^n$ 种情况。所以 $|F| = |Y|^n$。

Y^n 表示集合的笛卡尔积，所以有 $|Y|^n = |Y^n|$。

所以 $|F| = |Y|^n = |Y^n|$，所以 $F \sim Y^n$。

□

4. * 证明无限可数集的所有有限子集组成一个可数集。

证明：

设 A 为无限可数集，则 A 可以和 $\mathbb{N}$ 一一对应，所以可以将 A 记为 $\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$。

对于 $\forall M \in \mathbb{N}$，取 $B_M = \{a_i \mid i \in \mathbb{N}, i \leqslant M\}$，则 A 的所有有限子集可以记作

$$\bigcup_{M\in\mathbb{N}} P(B_M)$$

而对于 $\forall M \in \mathbb{N}$，$a_{M+1} \notin B_M$，$a_{M+1} \in B_{M+1}$，所以 $\{a_{M+1}\} \notin P(B_M)$，$\{a_{M+1}\} \in P(B_{M+1})$，所以

$$\bigcup_{1\leqslant m\leqslant M} P(B_m) \subsetneqq \bigcup_{1\leqslant m\leqslant M+1} P(B_m)$$

所以对于有限集合 $\bigcup\limits_{1\leqslant m\leqslant M} P(B_m)$ 和 $\bigcup\limits_{1\leqslant m\leqslant M+1} P(B_m)$，有

$$\left|\bigcup_{1\leqslant m\leqslant M} P(B_m)\right| + 1 \leqslant \left|\bigcup_{1\leqslant m\leqslant M+1} P(B_m)\right|$$

根据极限的定义可知

$$\left|\bigcup_{M\in\mathbb{N}} P(B_M)\right| = \left|\lim_{M\to\infty} \bigcup_{1\leqslant m\leqslant M} P(B_m)\right| \geqslant \lim_{M\to\infty} \left|\bigcup_{1\leqslant m\leqslant M} P(B_m)\right| = +\infty$$

所以 A 的所有有限子集 $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} P(B_M)$ 是无限集，并且能找到 $\mathbb{N}$ 到 $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} P(B_M)$ 的映射，所以 $\left|\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} P(B_M)\right| \leqslant$ 可数集的基数，并且 $\left|\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} P(B_M)\right| \geqslant$ 可数集的基数。

所以 A 的所有有限子集 $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} P(B_M)$ 是可数集。

即 无限可数集的所有有限子集组成一个可数集。 □

6.3 不可解问题

1. * 设集合 $F = \{f \mid \mathbb{N} \to M\}$，其中 M 为正偶数集。证明：F 中存在这样的函数 f，计算 f 的 C 程序不存在。

证明：

由于 C 程序的集合是可数的，因此只需证明 F 为不可数集合。

根据 6.2 节的第 3 题可知，$|F| = |M|^{|\mathbb{N}|}$，所以 $F \sim \{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$，即 F 与问题集等势，所以 F 不可数。

□