《离散数学》作业

岳锦鹏

2023 年 9 月 19 日——2023 年 12 月 31 日

目录

第一章　集合论基础

1.1　集合的概念和术语

1. 给出集合-3,-2,-1,0,1,2,3 的谓词表示法。

   $\{x|x \in \mathbb{Z}, -3 \leq x \leq 3\}$

2. 判断 2 和 2 是否下列集合的元素。

   (1) $\{x|x$是大于 1 的整数$\}$

   2 是，2 不是。

   (2) $\{x|x$是某整数的平方$\}$

   2 不是，2 不是。

   (3) $\{2, \{2\}\}$

   2 是，2 是。

   (4) $\{\{2\}, \{\{2\}\}\}$

   2 不是，2 是。

   (5) $\{\{2\}, \{2, \{2\}\}\}$

   2 不是，2 是。

   (6) $\{\{\{2\}\}\}$

   2 不是，2 不是。

3. 下列哪些命题成立？哪些不成立？为什么？

   (1) $\emptyset \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

   成立。

   (2) $\emptyset \subseteq \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

   成立。

   (3) $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

   成立。

   (4) $\{\{\emptyset\}\} \subseteq \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

   成立。

1.2　集合的运算

1. 设 A 是 ECNU 二年级学生的集合，B 是 ECNU 必须学习离散数学的学生的集合。请用 A 和 B 表示 ECNU 不必学习离散数学的二年级的学生的集合。
   $A \setminus B$

2. 设 A 是集合，下列命题是否必定成立？

   (1) $A \in P(A)$
   是。

   (2) $A \subseteq P(A)$
   否。

   (3) $\{A\} \in P(A)$
   否。

   (4) $\{A\} \subseteq P(A)$
   是。

3. 设 A 和 B 是任意集合，证明 $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$。

   证明 ：

   证明:

$$
\begin{aligned}
& X \in P(A) \cap P(B) \\
\Leftrightarrow & X \in P(A) \text{且} X \in P(B) \\
\Leftrightarrow & X \subseteq A, X \subseteq B \\
\Leftrightarrow & X \subseteq A \cap B \\
\Leftrightarrow & X \in P(A \cap B) \\
\therefore & P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)
\end{aligned}
$$

□

4. 设 A 是任意集合，$A^3 = (A \times A) \times A = A \times (A \times A)$ 是否成立？为什么？
   不一定，假设$A = \{1\}$，则$A^3 = \{(1,1,1)\}, (A \times A) \times A = \{((1,1),1)\}, A \times (A \times A) = \{(1,(1,1))\}$

5. 设 A、B、C 和 D 是集合，证明：若 A、B、C 和 D 均非空集，且 A×B=C×D，那么 A=C 且 B=D。

证明：

$$\begin{aligned}
&\text{假设}A \neq C\text{或}B \neq D\\
&\text{则}\exists x, x \in A, x \notin C\text{或}x \in C, x \notin A\\
&\text{或}\exists y, y \in B, y \notin D\text{或}y \in D, y \notin B\\
&\text{不妨设}\exists x, x \in A, x \notin C\\
&\because B\text{非空}\\
&\therefore \text{设}b \in B\\
&\text{则}(x, b) \in A \times B\\
&\because x \notin C\\
&\therefore (x, b) \notin C \times D\\
&\therefore A \times B \neq C \times D\\
&\text{与已知矛盾}\\
&\therefore \text{若}A\text{、}B\text{、}C\text{和}D\text{均非空集，且}A{\times}B = C{\times}D,\\
&\text{那么}A = C\text{且}B = D\text{。}
\end{aligned}$$

□

6. * 编写一个程序，输入任意一个自然数 n，输出 P(1,2,⋯,n) 的所有元素。（JavaScript，Nodejs 环境）

```
const readline = require("readline");
const rl = readline.createInterface({
    input: process.stdin,
    output: process.stdout,
});

let n;

function get_pow_set(end_num) {
    end_num = parseInt(end_num);
    let pow_set = [[]];
    for (let i = 1; i <= end_num; i++) {
        pow_set = pow_set.concat(pow_set.map((ele) => {
            return ele.concat([i]);
        }));
    }
    return pow_set;
}

rl.question("", (answer) => {
    n = parseInt(answer);
    console.log(get_pow_set(n));
```

```
        rl.close();
    });
```

1.3 集合运算的性质

9. 设A、B、C是集合，证明下列结论：

(3) 若$A \cap B = \varnothing$，则$A - B = A$

证明：

$$\begin{aligned}
&\because A \cap B = \varnothing \\
&\therefore \forall x \in A \implies x \notin B \\
&\therefore \forall x \in A \implies x \in \bar{B} \\
&\therefore A \subseteq \bar{B} \\
&\therefore A \cap \bar{B} = A \\
&\therefore A - B = A
\end{aligned}$$

□

11. 指出下列集合等式成立的充分必要条件，其中A、B和C是集合：

(5) $(A - B) \cap (A - C) = \varnothing$

$$\begin{aligned}
&(A - B) \cap (A - C) = A \cap \bar{B} \cap A \cap \bar{C} = A \cap \bar{B} \cap \bar{C} = A - B - C = \varnothing \\
&\iff A - B - C = \varnothing
\end{aligned}$$

13. 设A和B是集合，集合运算对称差$\oplus$定义如下：$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$.
证明下列恒等式，其中A、B和C是任意集合：

(5) $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$

证明：

$$\begin{aligned}
(A \cup B) - (A \cap B) &= (A \cup B) \cap \overline{A \cap B} \\
&= (A \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) \\
&= ((A \cup B) \cap \bar{A}) \cup ((A \cup B) \cap \bar{B}) \\
&= (B \cap \bar{A}) \cup (A \cap \bar{B}) \\
&= (A - B) \cup (B - A) \\
&= A \oplus B
\end{aligned}$$

□

21. 设 A、B、C 和 D 是任意集合. 请证明：

(1) $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$

证明：

$$\begin{aligned}
\forall(x,y),\quad & (x,y)\in(A\times C)\cap(B\times D)\\
\Longleftrightarrow\ & (x,y)\in(A\times C)\text{且}(x,y)\in(B\times D)\\
\Longleftrightarrow\ & x\in A, y\in C\text{且}x\in B, y\in D\\
\Longleftrightarrow\ & x\in A\cap B\text{且}y\in C\cap D\\
\Longleftrightarrow\ & (x,y)\in(A\cap B)\times(C\cap D)\\
\therefore\quad & (A\times C)\cap(B\times D)=(A\cap B)\times(C\cap D)
\end{aligned}$$

□

22. 设 $\{A_\beta|\beta\in B\}$ 是以 B 为下标集的集合族. 证明下列恒等式.

(1) $\overline{\bigcup\limits_{\beta\in B}A_\beta}=\bigcap\limits_{\beta\in B}\overline{A_\beta}$

证明：

$$\begin{aligned}
\forall x,\quad & x\in\overline{\bigcup_{\beta\in B}A_\beta}\\
\Longleftrightarrow\ & x\notin\bigcup_{\beta\in B}A_\beta\\
\Longleftrightarrow\ & \neg(\exists\beta\in B, x\in A_\beta)\\
\Longleftrightarrow\ & \forall\beta\in B, x\notin A_\beta\\
\Longleftrightarrow\ & \forall\beta\in B, x\in\overline{A_\beta}\\
\Longleftrightarrow\ & x\in\bigcap_{\beta\in B}\overline{A_\beta}\\
\therefore\quad & \overline{\bigcup_{\beta\in B}A_\beta}=\bigcap_{\beta\in B}\overline{A_\beta}
\end{aligned}$$

□

24. 设集合族 $\{A_n|n\in\mathbb{N}\}$，令 $B_0=A_0$，$B_n=A_n-\bigcup\limits_{k=0}^{n-1}A_k(n>0)$. 证明:

(2) $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}A_n=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}B_n$

证明：

$$\because B_n = A_n - \bigcup_{k=0}^{n-1} A_k (n > 0)$$

$$\therefore \forall n > 0, B_n \in A_n$$

$$\forall x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \iff \exists n_0 \in \mathbb{N}, x \in B_{n_0} \implies x \in A_{n_0}$$

$$\therefore \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \supseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$$

$$\forall x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n, \text{则} \exists n \in \mathbb{N}, x \in A_n$$

$$\text{设} C_x = \{n | x \in A_n\}$$

$$\text{设} n_1 = \min C_x$$

$$\text{则} x \in A_{n_1} \text{且} \forall n_2 < n_1, x \notin A_{n_2}$$

$$\therefore x \notin \bigcup_{k=0}^{n_1-1} A_k$$

$$\therefore x \in A_{n_1} - \bigcup_{k=0}^{n_1-1} A_k$$

$$\therefore x \in B_{n_1}$$

$$\therefore x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$$

$$\therefore \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$$

$$\therefore \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$$

□

1.4 有限集合的计数

26. *以 1 开头或者以 00 结束的不同的字节（8 位的二进制串）有多少个？*

设A为以1开头的不同的字节，B为以00结束的不同的字节。

则 $|\text{以1开头或者以00结束的不同的字节}| = |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 2^7 + 2^6 - 2^5 = 160$

27. 在$1 \sim 200$的正整数中，

(3) 含因子3或5，但不同时含因子3和5的正整数共有多少个？

设A为$1 \sim 200$中含因子3的正整数，B为$1 \sim 200$中含因子5的正整数

则 $|\text{在}1 \sim 200\text{的正整数中含因子3或5，但不同时含因子3和5的正整数}|$

$= |A \oplus B| = |A| + |B| - 2|A \cap B| = 66 + 40 - 2 * 13 = 80$

* 用 JavaScript 再验证一下：

```
> a =[]
[]
```

```
> for (let i = 1; i<=200; i++){
... a.push(i);
... }
>  a.reduce((out, cur) => {
... if ((cur%3==0 || cur%5==0) && cur%15!=0) out.push(cur);
... return out;
... }, Array()).length
80
```

(5) 与15互素的正整数（即与15之间的最大公因子为1的那些正整数）共有多少个？

A与B的定义和上题相同

则 $|$在$1\sim 200$的正整数中与15互素的正整数$|$

$= |1\sim 200$的正整数$| - |A\cup B|$

$= 200-(|A|+|B|-|A\cap B|) = 200-(66+40-13) = 107$

第二章　数论基础

第三章　命题逻辑

3.1　命题

1. 下列语句哪些是命题?

   (1) 2 是正数吗?

   不是。

   (2) $x^2 + x + 1 = 0$

   是。

   (3) 我要上学。

   是。

   (4) 明年 2 月 1 日下雨。

   是。

   (5) 如果股票涨了，那么我就赚钱。

   是。

2. 将当当网的图书高级搜索符号化:http://search.dangdang.com/AdvanceSearch/AdvanceSearch.aspx?c=0

   $介质=\{\}\wedge书名=\{\}\wedge作者译者=\{\}\wedge关键词=\{\}\wedge出版社=\{\}\wedge ISBN=\{\}\wedge包装=\{\}$
   $\wedge分类=\{\}\wedge\{最低价格\}\leq价格\leq\{最高价格\}\wedge\{最低折扣\}\leq折扣\leq\{最高折扣\}$
   $\wedge\{最早出版时间\}\leq出版时间\leq\{最晚出版时间\}\wedge库存状态=\{\}$

3. 请将语句“除非你已满 16 周岁，否则只要你身高不足 1.2 米就不能乘公园的滑行铁道”符号化。

   令p：你已满16周岁，q：你身高足1.2米，r：你能乘公园的滑行铁道。

   命题符号化为：$\neg p \to (\neg q \to \neg r)$

4. p、q、r 为如下命题:

   p：你得流感了

   q：你错过了最后的考试

   r：这门课你通过了

   请用自然语言表达命题 $(p \to \neg r) \vee (q \to \neg r)$。

   如果你得流感了，那么这门课你没通过，或者如果你错过了最后的考试，那么这门课你没通过。

5. 判断下列命题的真值：

   (1) 若$1+1=3$，则$2+2=4$

   最外层的蕴含式的前件为假，所以此命题的真值为1。

   (2) 若鸟会飞，则$1+1=3$

   在考虑例外的情况下（∃不会飞的鸟类）：

   最外层的蕴含式的前件为假，所以此命题的真值为1。

   在不考虑例外的情况下：

   最外层的蕴含式的前件为真，但后件为假，所以此命题的真值为0。

6. 构造一个只含命题变量 p、q 和 r 的命题公式 A，满足：p、q 和 r 的任意一个赋值是 A 的成真赋值当且仅当 p、q 和 r 中恰有两个为真

$$A = (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$$

3.2 等值演算

1. 将下列两个命题符号化，并分别用真值表和等值演算的方法证明所得到的那两个命题公式是等值的。

   (1) 你不会休息所以就不会工作，你没有丰富的知识所以你就不会工作。

   (2) 你会工作所以一定会休息并具有丰富的知识。

   令p：你会休息，q：你会工作，r：你有丰富的知识

   则(1)符号化为$(\neg p \to \neg q) \wedge (\neg r \to \neg q)$

   (2)符号化为$q \to p \wedge r$

证明 ：

以下是真值表：

p	q	r	$(\neg p \to \neg q) \wedge (\neg r \to \neg q)$	$q \to p \wedge r$
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

以下是等值演算：

$$\begin{aligned}(\neg p \to \neg q) \wedge (\neg r \to \neg q) &= (p \vee \neg q) \wedge (r \vee \neg q)\\ &= (p \wedge r) \vee \neg q\\ &= \neg q \vee (p \wedge r)\\ &= q \to p \wedge r\end{aligned}$$

所以$(\neg p \to \neg q) \land (\neg r \to \neg q)$与$q \to p \land r$等值。

□

2. 用等值演算的方法证明命题恒等式 $p \to (q \to p) = \neg p \to (p \to \neg q)$

证明：

$$\begin{aligned} \neg p \to (p \to \neg q) &= p \lor (p \to \neg q) \\ &= p \lor (\neg p \lor \neg q) \\ &= \neg p \lor \neg q \lor p \\ &= p \to (\neg q \lor p) \\ &= p \to (q \to p) \end{aligned}$$

□

3. 一教师要从 3 名学生 A、B 和 C 中选派 1∼2 人参加市级科技竞赛，需满足以下条件：

(1) 若 A 去，则 C 同去；

(2) 若 B 去，则 C 不能去；

(3) 若 C 不去，则 A 或 B 可以去。

问该如何选派？

令a：A去，b：B去，c：C去

则需满足：
$$\begin{aligned} &(a \to c) \land (b \to \neg c) \land (\neg c \to a \lor b) \land \neg(a \land b \land c) \\ &= (\neg a \lor c) \land (\neg b \lor \neg c) \land (c \lor (a \lor b)) \land (\neg a \lor \neg b \lor \neg c) \\ &= (\neg a \lor c) \land (\neg b \lor \neg c) \land (a \lor b \lor c) \land (\neg a \lor \neg b \lor \neg c) \\ &= (\neg a \lor \neg b \lor c) \land (\neg a \lor b \lor c) \land (\neg a \lor \neg b \lor \neg c) \land (a \lor \neg b \lor \neg c) \land (a \lor b \lor c) \\ &= \bigwedge M(0,3,4,6,7) \\ &= \bigvee m(1,2,5) \\ &= (\neg a \land \neg b \land c) \lor (\neg a \land b \land \neg c) \lor (a \land \neg b \land c) \end{aligned}$$

即选派C或选派B或选派AC。

3.3 范式和联结词的功能完备集

1. 通过等值演算求 $p \to (p \land (q \to p))$ 的主析取范式和主合取范式。

解：

$$\begin{aligned} p \to (p \land (q \to p)) &= \neg p \lor (p \land (\neg q \lor p)) = \neg p \lor ((p \lor 0) \land (p \lor \neg q)) \\ &= \neg p \lor (p \lor (0 \land \neg q)) = \neg p \lor p = 1 \\ &= (p \land q) \lor (p \land \neg q) \lor (\neg p \land q) \lor (\neg p \land \neg q) \qquad \text{(主析取范式)} \end{aligned}$$

因为原式为永真式，所以无主合取范式。

□

2. 证明 $\{\neg, \to\}$ 是功能完备集。

证明：

$$\neg p = \neg p$$

$$p \vee q = \neg p \to q$$

$$\because \{\neg, \vee\}\text{是功能完备集}$$

$$\therefore \{\neg, \to\}\text{是功能完备集}$$

□

3.4 命题逻辑的推理理论

1. 证明 $p \to (q \to s), q, p \vee \neg r \Rightarrow r \to s$。

证明：

① r	附加前提引入
② $p \vee \neg r$	前提引入
③ p	①②析取三段论
④ $p \to (q \to s)$	前提引入
⑤ $q \to s$	③④假言推理
⑥ q	前提引入
⑦ s	⑤⑥假言推理

□

2. 构造下列推理的形式证明：“今天下午没有出太阳并且今天比昨天冷。只有今天下午出太阳，我们才去游泳。若我们不去游泳，则我们乘独木舟游览。若我们乘独木舟游览，则我们在黄昏时回家。所以，我们在黄昏时回家。”

证明：

令p：今天下午出太阳，q：今天比昨天冷，r：我们去游泳，

s：我们乘独木舟游览，t：我们在黄昏时回家

则需要证明：$\neg p \wedge q, r \to p, \neg r \to s, s \to t \Rightarrow t$

① $\neg p \wedge q$	前提引入
② $\neg p$	①化简
③ $r \to p$	前提引入
④ $\neg r$	②③拒取式
⑤ $\neg r \to s$	前提引入

⑥ s	④⑤假言推理
⑦ $s \to t$	前提引入
⑧ t	⑥⑦假言推理

□

第四章　一阶逻辑

4.1　谓词、量词和谓词公式

1. 用谓词公式表达语句“所有的运动员都钦佩某些教练”，个体域为全总个体域。

解：

由于个体域为全总个体域，

设$P(x)$表示x为运动员，$Q(x)$表示x为教练，$R(x,y)$表示x钦佩y，

注意到“某些”表示复数，则语句“所有的运动员都钦佩某些教练”可表示为：

$\forall x(P(x) \rightarrow \exists y \exists z((y \neq z) \wedge Q(y) \wedge Q(z) \wedge R(x,y) \wedge R(x,z)))$

□

2. 用谓词公式表达语句“本班的学生都已学过微积分”，个体域分别取 ECNU 的学生集合和本班的学生集合。

解：

当个体域取$ECNU$的学生集合时，

设$P(x)$表示x为本班的学生，$Q(x)$表示x已学过微积分，

则语句“本班的学生都已学过微积分”可表示为：

$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$

当个体域取本班的学生集合时，

设$Q(x)$表示x已学过微积分，

则语句“本班的学生都已学过微积分”可表示为：

$\forall x Q(x)$

□

3. 用谓词公式表达语句“班上无人恰给另外两个同班同学发过电子邮件”，个体域取本班学生的集合。

解：

由于个体域为本班学生的集合，

设$P(x,y)$表示x给y发过电子邮件，

则语句“班上无人恰给另外两个同班同学发过电子邮件”可表示为：

$\neg \exists x(\exists y \exists z((y \neq z) \wedge P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge \forall w((w \neq y) \wedge (w \neq z) \rightarrow \neg P(x,w))))$

□

4. 将 $\forall x(C(x) \vee \exists y(C(y) \wedge F(x,y)))$ 翻译成汉语，其中 C(x) 表示 x 有电脑，F(x,y) 表示 x 和 y 是同班同学，个体域是学校全体学生的集合。

解：

对于学校中的任何一个学生，他有电脑，或者存在一个他的同班同学有电脑。

□

5. 给定解释 I 如下：
个体域 $D: \{-2,3,6\}$；
个体常元 $a: 6$；
谓词 $P: 2>1, Q(x): x \leqslant 3, R(x): x>5$。
求出谓词公式 $\forall x(P \to Q(x)) \vee R(a)$ 在解释 I 下的真值。

解：

$$
\begin{aligned}
&\forall x(P \to Q(x)) \vee R(a)\text{在解释}I\text{下的真值为：}\\
&((P \to Q(-2)) \wedge (P \to Q(3)) \wedge (P \to Q(6))) \vee R(6)\\
&= (((2>1) \to (-2 \leqslant 3)) \wedge ((2>1) \to (3 \leqslant 3)) \wedge ((2>1) \to (6 \leqslant 3))) \vee (6>5)\\
&= ((1 \to 1) \wedge (1 \to 1) \wedge (1 \to 0)) \vee 1\\
&= (1 \wedge 1 \wedge 0) \vee 1\\
&= 0 \vee 1\\
&= 1
\end{aligned}
$$

□

书上 3. 请将下列谓词公式翻译为汉语，并指出每个命题的真值，这里个体域为实数集。

(1) $\forall x(x^2 = x)$；

对于任何一个实数x，都有$x^2 = x$

真值为0

(2) $\exists x(2x = x)$；

存在一个实数x，满足$2x = x$

真值为1

(3) $\exists x(x^2 + 3x - 2 = x)$；

存在一个实数x，使得$x^2 + 3x - 2 = x$

真值为1

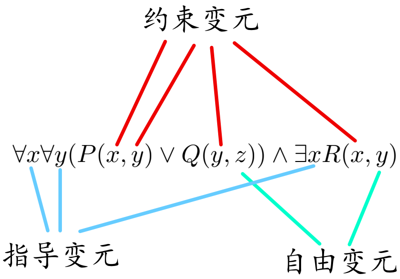
(4) $\forall x(x - 3 < x)$；

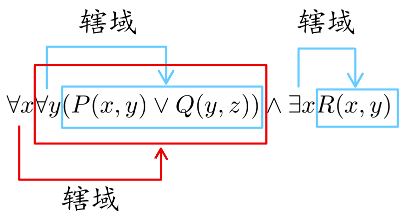
对于任意一个实数x，都有$x - 3 < x$

真值为1

4.2 谓词公式的等值演算和前束范式

1. 指出谓词公式 $\forall x\forall y(P(x,y)\vee Q(y,z))\wedge\exists xR(x,y)$ 的指导变元、量词的辖域、约束变元和自由变元。





2. 求谓词公式 $\forall x\forall y(P(x,y)\leftrightarrow Q(x,y))\to\exists x\forall yR(x,y)$ 的前束范式。

解：

$$
\begin{aligned}
&\forall x\forall y(P(x,y)\leftrightarrow Q(x,y))\to\exists x\forall yR(x,y) \\
=&\forall x\forall y(P(x,y)\leftrightarrow Q(x,y))\to\exists z\forall uR(z,u) && \text{(换名)} \\
=&\neg(\forall x\forall y(P(x,y)\leftrightarrow Q(x,y)))\vee\exists z\forall uR(z,u) && \text{(消去}\to\text{)} \\
=&\exists x\exists y(\neg(P(x,y)\leftrightarrow Q(x,y)))\vee\exists z\forall uR(z,u) && \text{(内移}\neg\text{)} \\
=&\exists x\exists y\exists z\forall u(\neg(P(x,y)\leftrightarrow Q(x,y))\vee R(z,u)) && \text{(量词前移)} \\
=&\exists x\exists y\exists z\forall u((P(x,y)\leftrightarrow Q(x,y))\to R(z,u)) && \text{(恢复}\to\text{(非必要))}
\end{aligned}
$$

□

4.3 一阶逻辑的推理理论

1. 构造 $\forall x(P(x)\vee Q(x)),\forall x(Q(x)\to\neg R(x)),\forall xR(x)\Rightarrow\forall xP(x)$ 的形式证明。

证明：

设y为任意的个体变量

① $\forall x(P(x)\vee Q(x))$	前提引入
② $P(y)\vee Q(y)$	① US 规则
③ $\forall x(Q(x)\to\neg R(x))$	前提引入
④ $Q(y)\to\neg R(y)$	③ US 规则
⑤ $\forall xR(x)$	前提引入
⑥ $R(y)$	⑤ US 规则
⑦ $\neg Q(y)$	④ ⑥ 拒取式
⑧ $P(y)$	② ⑦ 析取三段论
⑨ $\forall xP(x)$	⑧ UG 规则

□

2. 证明下面的推理：
"每个科研工作者都是努力工作的。每个努力工作而又聪明的人都取得事业的成功。某个人是科研工作者并且聪明。所以，某人事业取得成功。"

设$P(x)$: x是科研工作者，$Q(x)$: x努力工作，$R(x)$: x聪明，$S(x)$: x取得事业的成功，
e : 某个人，则需要证明：
$\forall x(P(x) \to Q(x)), \forall x(Q(x) \wedge R(x) \to S(x)), P(e) \wedge R(e) \Rightarrow S(e)$

证明 ：

① $P(e) \wedge R(e)$	前提引入
② $P(e)$	① 化简
③ $R(e)$	① 化简
④ $\forall x(P(x) \to Q(x))$	前提引入
⑤ $P(e) \to Q(e)$	④ US 规则
⑥ $Q(e)$	② ⑤ 假言推理
⑦ $Q(e) \wedge R(e)$	③ ⑥ 合取引入
⑧ $\forall x(Q(x) \wedge R(x) \to S(x))$	前提引入
⑨ $Q(e) \wedge R(e) \to S(e)$	⑧ US 规则
⑩ $S(e)$	⑦ ⑨ 假言推理

□

第五章　关系

5.1　关系的概念

1. 集合 $X = \{a, b, c\}$ 上的一个关系 R 的关系矩阵如下，请写出这个关系。(注：矩阵的第 1、2、3 行以及第 1、2、3 列，分别对应 X 中的元素 a、b、c)。

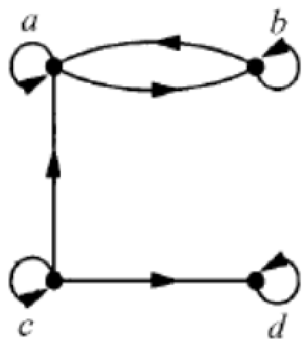
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

解：

$$R = \{(a, a), (a, c), (b, b), (c, a), (c, c)\}$$

□

2. 一集合上的一个关系的关系图如下图所示，请写出这个关系。



解：

$$R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b),$$
$$(c, a), (c, c), (c, d), (d, d)\}$$

□

3. 设 X 和 Y 都是有限集，$|X| = m$，$|Y| = n$。问 X 到 Y 的不同的关系有多少个？

解：

$$X\text{到}Y\text{的不同的关系有}2^{m\times n}\text{个。}$$

□

5.2 关系的运算

1. 设 R 是 X 到 Y 的二元关系，S 是 Y 到 Z 的二元关系，证明 $(R\circ S)^{-1}=S^{-1}\circ R^{-1}$。

证明：

$$\begin{aligned}\forall(z,x),\qquad &(z,x)\in(R\circ S)^{-1}\\ \Longleftrightarrow\ &(x,z)\in R\circ S\\ \Longleftrightarrow\ &\exists y\in Y,\ \ \text{s.t. }(x,y)\in R\wedge(y,z)\in S\\ \Longleftrightarrow\ &\exists y\in Y,\ \ \text{s.t. }(y,x)\in R^{-1}\wedge(z,y)\in S^{-1}\\ \Longleftrightarrow\ &(z,x)\in S^{-1}\circ R^{-1}\end{aligned}$$

$$\therefore (R\circ S)^{-1}=S^{-1}\circ R^{-1}$$

□

2. 设 R、S、T 都是 X 上的关系。证明: $R\circ(S\cap T)\subseteq(R\circ S)\cap(R\circ T)$, $(R\cap S)\circ T\subseteq(R\circ T)\cap(S\circ T)$。

证明：

$$\begin{aligned}&\forall(x,w)\in R\circ(S\cap T)\\ &\text{即}\exists y\in X,\ \ \text{s.t. }(x,y)\in R\wedge(y,w)\in S\cap T\\ &\therefore (x,y)\in R,(y,w)\in S,(y,w)\in T\\ &\therefore (x,w)\in R\circ S,(x,w)\in R\circ T\\ &\therefore (x,w)\in(R\circ S)\cap(R\circ T)\\ &\therefore R\circ(S\cap T)\subseteq(R\circ T)\cap(S\circ T)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\forall(x,w)\in(R\cap S)\circ T\\ &\text{即}\exists z\in X,\ \ \text{s.t. }(x,z)\in R\cap S\wedge(z,w)\in T\\ &\therefore (x,z)\in R,(x,z)\in S,(z,w)\in T\\ &\therefore (x,w)\in R\circ T,(x,w)\in S\circ T\\ &\therefore (x,w)\in(R\circ T)\cap(S\circ T)\\ &\therefore (R\cap S)\circ T\subseteq(R\circ T)\cap(S\circ T)\end{aligned}$$

□

5.3 关系的特殊性质及其闭包

1. 下列关系是否是自反、反自反、对称、反对称和传递的?

(1) 集合 $X=\{1,2,...,9,10\}$，X 上的关系 $R=\{(x,y)|x+y=10\}$

(2) 任意集合 X 上的恒等关系 I_X。

(3) 任意集合 X 上的空关系 $\varnothing$。

关系	自反	反自反	对称	反对称	传递
(1) R	否	否	是	否	否
(2) I_X	是	否	是	是	是
(3) $\varnothing$	否	是	是	是	是

2. 设 X 是所有人组成的集合，定义 X 上的关系 R_1 和 R_2：aR_1b 当且仅当 a 比 b 高，aR_2b 当且仅当 a 和 b 有共同的祖父母。问关系 R_1 和 $R2$ 是否是自反、反自反、对称、反对称、传递的？

关系	自反	反自反	对称	反对称	传递
R_1	否	是	否	是	是
R_2	是	否	是	否	是

3. * 下面的论证试图证明：如果集合 S 上的关系 R 是对称和传递的，那么 R 必定也是自反的。请指出其中的错误。
“由对称性，从 xRy 可推出 yRx，再由传递性，可从 xRy 和 yRx 推出 xRx。于是，对任意 x∈S，xRx 成立，所以 R 是自反的”

解：

$$\begin{aligned}&\text{对于}\forall x\in S,\text{并不一定}\exists y\in S,\quad \text{s.t. } xRy\\&\text{当}\neg\exists y(y\in S\wedge xRy)\text{时上述论证无效。}\end{aligned}$$

□

4. 证明：若 R 是 X 上自反和传递的关系，则 $R^2{=}R$。

证明：

$$\begin{aligned}&\forall(x,z)\in R^2\\&\Rightarrow\exists y\in X,\quad \text{s.t. }(x,y)\in R\wedge(y,z)\in R\\&\because R\text{是传递的}\\&\therefore (x,z)\in R\\&\therefore R^2\subseteq R\\&\forall(x,z)\in R\\&\because R\text{是自反的}\\&\therefore (z,z)\in R\\&\therefore (x,z)\in R^2\\&\therefore R\subseteq R^2\\&\text{综上所述，}\ R^2=R\end{aligned}$$

□

5. 设 X 是有限集，$|X|=n$。问 X 上有多少个不同的：

(1) * 对称关系?

即n维对称矩阵的个数,

$$2^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

(2) * 反对称关系?

n维矩阵的每组对称位置只有00、01、10
三种情况,对角线每个位置可以为0或1,

$$3^{\frac{n(n-1)}{2}} \times 2^n$$

(3) 既非自反又非反自反的关系?

即对角线既不是全1,也不是全0的n维矩阵个数,

$$(2^n - 2) \times 2^{n^2-n}$$

6. 设 R_1 和 R_2 是 X 上的关系。证明 $t(R_1 \cup R_2) \supseteq t(R_1) \cup t(R_2)$。

证明:

$$\because t(R) = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$$
$$\therefore \text{原式可转化为} \bigcup_{i=1}^{\infty} (R_1 \cup R_2)^i \supseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} R_1^j \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} R_2^k$$

之后实在不会做了。

□

5.4 等价关系和划分

1. 设 X 是所有人组成的集合,如下定义的关系哪些是 X 上的等价关系?

(1) $\{(a,b)|$a 是 b 的兄弟$\}$ 不是

(2) $\{(a,b)|$a 与 b 的年龄相差不超过 3 岁$\}$ 不是

(3) $\{(a,b)|$a 和 b 有相同的祖父$\}$ 是

(4) $\{(a,b)|$a 与 b 相识$\}$ 不是

(5) $\{(a,b)|$a 与 b 会说同一种语言$\}$ 是

2. 若 R_1 和 R_2 是 X 上的等价关系,则 $X^2 - R_1$、$R_1 - R_2$、R_1^2、$t(R_1 \cup R_2)$ 是否也都是 X 上的等价关系?为什么?

解：

$\because \forall x \in X, (x,x) \in R_1 \quad \therefore (x,x) \notin X^2 - R_1 \quad \therefore X^2 - R_1$不是$X$上的等价关系；

$\because X^2$是X上的等价关系 $\quad \therefore$ 若取$R_1 = X^2$，则$R_1 - R_2$不是X上的等价关系；

若取$R_2 = \varnothing$，则$R_1 - R_2$是X上的等价关系；

$\therefore R_1 - R_2$不一定是X上的等价关系

$R_1^2 = R_1$，是X上的等价关系

$\forall x \in X$，$(x,x) \in R_1 \subseteq R_1 \cup R_2 \subseteq t(R_1 \cup R_2) \quad \therefore t(R_1 \cup R_2)$是自反关系

由上一节的例题可知，对称关系的并也是对称关系，对称关系的传递闭包也是对称关系

$\therefore t(R_1 \cup R_2)$是对称关系

$t(R_1 \cup R_2)$是传递闭包，所以是传递关系

因此，$t(R_1 \cup R_2)$是X上的等价关系

□

3. 设 $X = \{(x,y) | \text{x 和 y 是不为零的实数}\}$，$E$ 是 X 上的关系：$(x_1,y_1)E(x_2,y_2)$ 当且仅当 $\dfrac{y_1}{x_1} = \dfrac{y_2}{x_2}$ 且 $x_1 \cdot x_2 > 0$。证明 E 是 X 上的等价关系，并给出 $[(x,y)]_E$ 的几何解释。

证明：

$\forall (x,y) \in X$，则$x \neq 0, y \neq 0 \quad \therefore x \cdot x = x^2 > 0, \dfrac{y}{x} = \dfrac{y}{x} \quad \therefore (x,y)E(x,y)$，即$E$是自反关系

$\forall ((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \in E$，即$x_1 \cdot x_2 > 0, \dfrac{y_1}{x_1} = \dfrac{y_2}{x_2}$，则$x_2 \cdot x_1 > 0, \dfrac{y_2}{x_2} = \dfrac{y_1}{x_1}$

$\therefore ((x_2,y_2),(x_1,y_1)) \in E$，即$E$是对称关系

$\forall ((x_1,y_1),(x_2,y_2)),((x_2,y_2),(x_3,y_3)) \in E$，即$x_1 \cdot x_2 > 0, x_2 \cdot x_3 > 0, \dfrac{y_1}{x_1} = \dfrac{y_2}{x_2}, \dfrac{y_2}{x_2} = \dfrac{y_3}{x_3}$

$\therefore x_1 \cdot x_3 > 0, \dfrac{y_1}{x_1} = \dfrac{y_3}{x_3} \quad \therefore ((x_1,y_1),(x_3,y_3)) \in E$，即$E$是传递关系

$\therefore E$是X上的等价关系

$[(x,y)]_E$表示从原点出发并经过(x,y)的某一条射线去除原点

□

4. 下面哪些 $\mathbb{Z}$ 的子集簇构成 $\mathbb{Z}$ 的划分？为什么？

(1) {偶数集, 奇数集}

构成，令$\pi = \{$偶数集, 奇数集$\}$，则偶数集 $\neq \varnothing$，奇数集 $\neq \varnothing$

偶数集 $\cap$ 奇数集 $= \varnothing$， 偶数集 $\cup$ 奇数集 $= \mathbb{Z}$

$\therefore \{$偶数集, 奇数集$\}$构成$\mathbb{Z}$的划分

(2) {正整数集, 负整数集}

不构成，$\because 0 \in \mathbb{Z}$，但$0 \notin$ 正整数集 $\cup$ 负整数集，即正整数集 $\cup$ 负整数集 $\neq \mathbb{Z}$

(3) {能被 3 整除的整数的集合, 被 3 除余数为 1 的整数的集合, 被 3 除余数为 2 的整数的集合}

构成，因为任何一个整数除以3的余数只能是0或1或2.

(4) {小于-100 的整数的集合, 绝对值不超过 100 的整数的集合, 大于 100 的整数的集合}

构成，任何一个整数必然在且只在这三个集合中的某一个集合中。

(5) {不能被 3 整除的整数的集合, 偶数集合, 被 6 除余数为 3 的整数的集合}

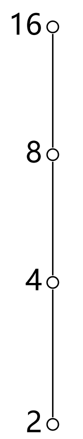
不构成，$\because 2 \in$ 不能被3整除的整数的集合 $\cap$ 偶数集合，

即不能被3整除的整数的集合 $\cap$ 偶数集合 $\neq \varnothing$

5.5 偏序关系

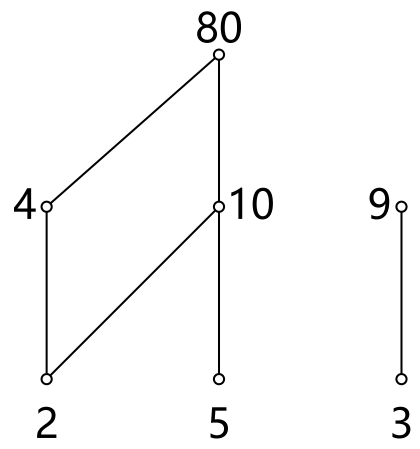
1. 下列集合关于整除关系 | 构成偏序集。请分别画出它们的哈斯图，判断它们是否是全序集，给出它们的极大元、极小元、最大元、最小元。

(1) $\{2, 4, 8, 16\}$；



极大元：16，极小元：2；
最大元：16，最小元：2。

(2) $\{2, 3, 4, 5, 9, 10, 80\}$。



极大元：80、9，极小元：2、5、3；
最大元：无，最小元：无。

2. 证明:

(1) 偏序集的最小元也必定是其极小元；

证明：

对于任意的偏序集$(X, \leqslant)$，若$a \in X$是它的最小元，取个体域为X

则$\forall x(a \leqslant x)$

$\because$ 偏序关系具有反对称性，

$\therefore \forall x((x = a) \vee \neg(x \leqslant a))$

$\therefore \forall x(\neg(x \neq a \wedge x \leqslant a))$

$\therefore \neg \exists x(x < a)$

$\therefore a$是$(X, \leqslant)$的极小元

□

(2) 任意全序集至多只有一个极小元，即全序集的极小元是唯一的。

证明：

对于任意的全序集$(X,\leqslant)$，假设$a,b\in X$都是它的极小元，取个体域为X

则$\neg\exists x(x<a)\wedge\neg\exists y(y<b)$

$\therefore\forall x(\neg(x<a))\wedge\forall y(\neg(y<b))$

$\therefore\neg(b<a)\wedge\neg(a<b)$

$\because(X,\leqslant)$是全序集

$\therefore a\leqslant b\wedge b\leqslant a$

$\therefore a=b$

因此，全序集的极小元是唯一的。

□

3. 设 R 是 X 上自反、传递的关系，$S=R\cap R^{-1}$。

(1) 证明 S 是 X 上的等价关系。

证明：

$\forall x\in X,(x,x)\in R\quad\therefore(x,x)\in R^{-1}\quad\therefore(x,x)\in R\cap R^{-1}=S$，即$S$是自反关系

$\forall(x,y)\in S$，即$(x,y)\in R\wedge(x,y)\in R^{-1}\quad\therefore(y,x)\in R^{-1}\wedge(y,x)\in R$

$\therefore(y,x)\in R\cap R^{-1}=S$，即$S$是对称关系

$\forall(x,y),(y,z)\in S$，即$(x,y)\in R\wedge(x,y)\in R^{-1}\wedge(y,z)\in R\wedge(y,z)\in R^{-1}$

$\therefore(x,y)\in R\wedge(y,z)\in R,\quad(y,x)\in R\wedge(z,y)\in R$

$\therefore(x,z)\in R,(z,x)\in R$

$\therefore(x,z)\in R,(x,z)\in R^{-1}$，即$(x,z)\in R\cap R^{-1}=S$，即$S$是传递关系

因此，S是X上的等价关系。

□

(2) 在 X/S 上定义关系 $T:([x]_S,[y]_S)\in T$ 当且仅当 $(x,y)\in R$。证明 T 是 X/S 上的偏序关系。

证明：

$\forall[x]_S\in X/S,$则$x\in X\quad\because R$是X上的自反关系$\quad\therefore(x,x)\in R$

$\therefore([x]_S,[x]_S)\in T$，即$T$是自反关系

$\forall([x]_S,[y]_S)\in T$，即$(x,y)\in R$，若$[x]_S\neq[y]_S$，则$(x,y)\notin S$

$\therefore(x,y)\notin R\vee(x,y)\notin R^{-1}$

$\because(x,y)\in R\quad\therefore(x,y)\notin R^{-1}\quad\therefore(y,x)\notin R$

$\therefore([y]_S,[x]_S)\notin T$，即$T$是反对称关系

$\forall([x]_S,[y]_S),([y]_S,[z]_S)\in T$，即$(x,y)\in R,(y,z)\in R$

$\because R$是X上的传递关系$\quad\therefore(x,z)\in R$

$\therefore([x]_S,[z]_S)\in T$，即$T$是传递关系

因此，T是X/S上的偏序关系。

□

第六章　函数

6.1　函数的概念和性质

1. $f: X \to Y$。对任意 $M \subseteq X$，定义 $f(M) = \{f(x) \mid x \in M\}$。对于任意 $A, B \subseteq X$，

   (1) 证明 $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$；

   证明：

   $\forall Z \in f(A \cup B)$, 则 $\exists x \in A \cup B$, 使得 $Z = f(x)$，因此 $x \in A$ 或者 $x \in B$。

   若 $x \in A$，则 $Z \in f(A)$；若 $x \in B$，则 $Z \in f(B)$。

   于是 $Z \in f(A) \cup f(B)$。

   所以 $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$。

   $\forall Z \in f(A) \cup f(B)$，则 $Z \in f(A)$ 或 $Z \in f(B)$。

   若 $Z \in f(A)$，则 $\exists x \in A$，使得 $Z = f(x)$，因此 $x \in A \cup B$，所以 $Z \in f(A \cup B)$。

   所以 $f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$。

   所以 $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$。 □

   (2) 举例说明 $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$。

   若 f, A, B 定义如下：

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$$

$$A = (-\infty, 0] \quad B = [0, +\infty)$$

   则 $f(A \cap B) = f(\{0\}) = \{0\}$，$f(A) \cap f(B) = [0, +\infty)$，

   则 $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$。

2. $f: X \to Y$，下列命题是否成立？

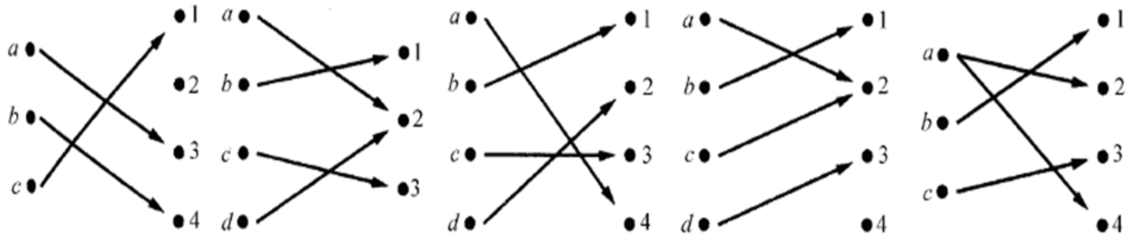
   (1) f 是一对一的当且仅当对任意 $a, b \in X$，当 $f(a) = f(b)$ 时，必有 $a = b$。

   成立，即一对一的定义的逆否命题。

   (2) f 是一对一的当且仅当对任意 $a, b \in X$，当 $f(a) \neq f(b)$ 时，必有 $a \neq b$。

   不成立，取 $X = \{1, 2\}$，$f(x) = \{\{1, 1\}, \{2, 1\}\}$。则 f 为 X 到 Y 的函数，且满足 $\forall a, b \in X$，$f(a) \neq f(b) \Rightarrow a \neq b$，但 f 不是一对一的。

3. 下图展示了五个关系的关系图。问：这些关系中，哪些是函数？哪些是一对一的函数？哪些是到上的函数？哪些是一一对应？



设从左到右分别为图 1、2、3、4、5。

图 1、2、3、4 是函数；

图 1、3 是一对一的函数；

图 2、3 是到上的函数；

图 3 是一一对应的函数。

4. $f: X \to Y, g: Y \to Z$。命题"$f \circ g$ 是一对一的当且仅当 f 和 g 都是一对一的"是否成立？

成立。

若 f 和 g 都是一对一的，则 $f \circ g$ 是一对一的为定理 6.1.2，现给出证明如下：

证明：

由 f 是一对一的可知 $\forall a, b \in X$ 且 $a \neq b$，有 $f(a) \neq f(b)$，而 g 也是一对一的，所以 $g(f(a)) \neq g(f(b))$，即 $f \circ g(a) \neq f \circ g(b)$，所以 $f \circ g$ 是一对一的。

□

下证若 $f \circ g$ 是一对一的，则 f 和 g 都是一对一的。

证明：

反证，若 f 和 g 都不是一对一的，则 $\exists a, b \in X$，使得 $f(a) = f(b)$，因此 $g(f(a)) = g(f(b))$，即 $f \circ g(a) = f \circ g(b)$，所以 $f \circ g$ 也不是一对一的。

□

6.2 集合的基数

1. 集合 $\{x \mid x \in \mathbb{Z}, \text{且}x\text{不能被 3 整除}\}$ 是否是可数集？若是，则给出自然数集 $\mathbb{N}$ 与它之间的一个一一对应。

解：

将给定的集合记为 A，它是可数集。

给出一一对应的函数如下：

$$f\colon \mathbb{N} \to A, x \mapsto \begin{cases} (-1)^{\lfloor \frac{x}{2} \rfloor} \times 3 \left\lfloor \dfrac{x+2}{4} \right\rfloor + 1, & x\text{为偶数}, x \geqslant 0 \\ (-1)^{\lfloor \frac{x}{2} \rfloor} \times 3 \left\lfloor \dfrac{x+2}{4} \right\rfloor + 2, & x\text{为奇数}, x \geqslant 0 \end{cases}$$

□

2. 设集合族 $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 和 $\{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 中的集合都是两两不相交的（$i \neq j$ 时 $A_i \cap A_j = \varnothing$，$B_i \cap B_j = \varnothing$），且对任意 $n \in \mathbb{N}$，$A_n \sim B_n$。请证明 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \sim \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$。

证明：

对于 $\forall n \in \mathbb{N}$，$A_n \sim B_n$，所以存在一一对应的 $f_n : A_n \to B_n$。

那么可以定义 f 如下：

$$f\colon \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n, x \mapsto \begin{cases} f_1(x), & x \in A_1 \\ f_2(x), & x \in A_2 \\ \cdots, & \cdots \\ f_n(x), & x \in A_n \end{cases}$$

因为 $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 两两不相交，所以 f 是一个函数，下面证明 f 是一一对应的。

对于任意的 $y \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$，由于 $\{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 两两不相交，则必定存在唯一的 $i \in \mathbb{N}$ 使得 $y \in B_i$，而 $f_i : A_i \to B_i$ 是一一对应的，所以必定存在唯一的 $x \in A_i \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ 使得 $f(x) = y$，因此 f 是一一对应的。

由于构造出了 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ 和 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_i$ 之间的一一对应的函数，所以 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \sim \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$。

□

3. 设 F 是 X 到 Y 的所有函数所组成的集合，$F = \{f \mid f : X \to Y\}$，$|X| = n$。证明 $F \sim Y^n$ 。

证明：

对于 $\forall f \in F$，f 都唯一对应于一个 $|X|$ 行 $|Y|$ 列的关系矩阵，并且每行有且仅有一个 1。那么每一行这个 1 的位置有 $|Y|$ 种情况，一共有 $|X|$ 行，所以一共有 $|Y|^{|X|} = |Y|^n$ 种情况。所以 $|F| = |Y|^n$。

Y^n 表示集合的笛卡尔积，所以有 $|Y|^n = |Y^n|$。

所以 $|F| = |Y|^n = |Y^n|$，所以 $F \sim Y^n$。

□

4. * 证明无限可数集的所有有限子集组成一个可数集。

证明：

设 A 为无限可数集，则 A 可以和 $\mathbb{N}$ 一一对应，所以可以将 A 记为 $\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$。

对于 $\forall M \in \mathbb{N}$，取 $B_M = \{a_i \mid i \in \mathbb{N}, i \leqslant M\}$，则 A 的所有有限子集可以记作

$$\bigcup_{M\in\mathbb{N}} P(B_M)$$

而对于 $\forall M \in \mathbb{N}$，$a_{M+1} \notin B_M$，$a_{M+1} \in B_{M+1}$，所以 $\{a_{M+1}\} \notin P(B_M)$，$\{a_{M+1}\} \in P(B_{M+1})$，所以

$$\bigcup_{1\leqslant m\leqslant M} P(B_m) \subsetneqq \bigcup_{1\leqslant m\leqslant M+1} P(B_m)$$

所以对于有限集合 $\bigcup\limits_{1\leqslant m\leqslant M} P(B_m)$ 和 $\bigcup\limits_{1\leqslant m\leqslant M+1} P(B_m)$，有

$$\left|\bigcup_{1\leqslant m\leqslant M} P(B_m)\right| + 1 \leqslant \left|\bigcup_{1\leqslant m\leqslant M+1} P(B_m)\right|$$

根据极限的定义可知

$$\left|\bigcup_{M\in\mathbb{N}} P(B_M)\right| = \left|\lim_{M\to\infty}\bigcup_{1\leqslant m\leqslant M} P(B_m)\right| \geqslant \lim_{M\to\infty}\left|\bigcup_{1\leqslant m\leqslant M} P(B_m)\right| = +\infty$$

所以 A 的所有有限子集 $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} P(B_M)$ 是无限集，并且能找到 $\mathbb{N}$ 到 $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} P(B_M)$ 的映射，所以 $\left|\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} P(B_M)\right| \leqslant$ 可数集的基数，并且 $\left|\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} P(B_M)\right| \geqslant$ 可数集的基数。

所以 A 的所有有限子集 $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} P(B_M)$ 是可数集。

即 无限可数集的所有有限子集组成一个可数集。 □

6.3 不可解问题

1. * 设集合 $F = \{f \mid \mathbb{N} \to M\}$，其中 M 为正偶数集。证明：F 中存在这样的函数 f，计算 f 的 C 程序不存在。

证明 :

由于 C 程序的集合是可数的，因此只需证明 F 为不可数集合。

根据 集合的基数 节的第 集合的基数 题可知，$|F| = |M|^{|\mathbb{N}|}$，所以 $F \sim \{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$，即 F 与问题集等势，所以 F 不可数。

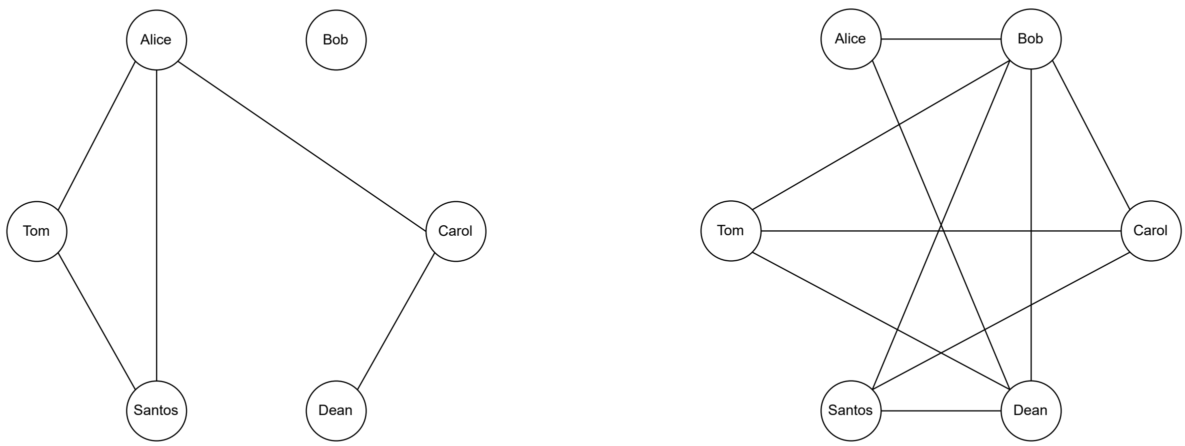
□

第七章　图论基础

7.1　图及其表示

1. 6 个学生：Alice、Bob、Carol、Dean、Santos 和 tom，其中，Alice 和 Carol 不和，Dean 和 Carol 不和，Santos、Tom 和 Alice 两两不和。请给出表示这种情形的图模型。

   用顶点表示学生，如果两个学生之间不和则连一条无向边，则可以表示成左图；如果两个学生相和则连一条无向边，则可以表示成右图。



(a) 不和图　　(b) 相和图

2. 至少含一个顶点的 C_3 的子图有多少个？

   解：

   含一个顶点的，点的情况有 $\mathrm{C}_3^1 = 3$ 种，无法形成边，所以有 $3 \times 1 = 3$ 种情况；

   含两个顶点的，点的情况有 $\mathrm{C}_3^2 = 3$ 种，可以没有边或者有 1 条边，所以有 $3 \times 2 = 6$ 种情况；

   含 3 个顶点的，点的情况有 $\mathrm{C}_3^3 = 1$ 种，边的情况为 2^3 种，所以有 $1 \times 2^3 = 8$ 种情况。

   所以至少含一个顶点的 C_3 的子图有 $3 + 6 + 8 = 17$ 个。

   □

3. 证明：在顶点个数不小于 2 的简单无向图中，必有度数相同的顶点。

   证明：

使用归纳法，首先，对于顶点数为 2 的简单无向图，这两个顶点之间要么有一条边要么没有边，而这两种情况它们的度都是相同的。

假设对于顶点数为 $k(k \geqslant 2)$ 的简单无向图，必有度数相同的顶点。那么对于顶点数为 $k+1$ 的简单无向图，如果存在一个顶点的度为 0，那么去除这个顶点后其他顶点构成 k 个顶点的简单无向图，因此它们之中必有度数相同的顶点。

如果不存在一个顶点的度数为 0，即所有顶点的度数都至少为 1，之后就不会了。

□

4. 对哪些 n 值来说下列图是偶图?

a) K_n	$n=2$	b) C_n	$n \geqslant 3$ 且为偶数
c) W_n	$n \in \varnothing$	d) Q_n	n 为任意正整数

7.2 握手定理

1. 简单无向图 G 有 n 个顶点，$n+1$ 条边，证明 G 中至少有一个顶点的度大于或等于 3。

证明：

反证法，设 $G=(V,E)$，假设 G 中所有顶点的度都小于 3，即 $\forall v \in V$, $d(v)<3$ 即 $d(v) \leqslant 2$，又已知 $|V|=n, |E|=n+1$，那么根据握手定理，则有

$$2(n+1) = 2\,|E| = \sum_{v \in V} d(v) \leqslant 2n$$

而这是不可能的，因此 G 中至少有一个顶点的度大于或等于 3。

□

2. * 一天晚上张先生夫妇参加了一个聚会，参加聚会的人中还有另外三对夫妇，他们相互握了手。假设没有人自己与自己握手，没有夫妻之间的握手，且同两个人握手不超过一次。当其他人告诉张先生，他或她握了多少次手时，答案都不相同。问张先生和太太分别握了几次手?

想了半天也想不出来怎么做。

7.3 图的连通性

1. 设简单无向图 $G=(V,E)$，若 $\delta(G) \geqslant k(k \geqslant 1)$。请证明：$G$ 有长度为 k 的基本通路。

证明：

使用数学归纳法，

由于 $\delta(G) \geqslant k \geqslant 1$，所以 G 中存在边，从而 G 不是零图，因此必定有长度为 1 的基本通路。

假设 G 中存在长度为 $m-1$ 的基本通路 α $(m \leqslant k)$，则 α 中的顶点总数为 m（基本通路的顶点互不相同）。那么对于 α 两端的其中一个端点 v，α 去除 v 后的顶点总数为 $m-1$。由于 $d(v) \geqslant \delta(G) \geqslant k \geqslant m > m-1$，即 v 的度数大于 α 中去除 v 后的顶点总数，所以与 v

相连的边中必定存在一条边 e 连接了不在 α 中的顶点 v'，于是将边 e 和顶点 v' 加入到 α 中，就构成了长度为 m 的基本通路。

所以 $\forall m \in \mathbb{N}, 1 \leqslant m \leqslant k$，$G$ 有长度为 m 的基本通路。自然地，G 有长度为 k 的基本通路。

□

2. 证明：若无向图 G 没有长度为奇数的基本回路，则 G 没有任何长度为奇数的回路。

证明：

证明原命题的逆否命题“若 G 中存在一条长度为奇数的回路，则 G 中必定存在长度为奇数的基本回路。”

若 G 中存在一条长度为奇数的回路 α，则可以设 $\alpha = v_0e_1v_1e_2\cdots e_kv_k$，$\alpha$ 的长度 k 为奇数。若 α 是基本回路，则 G 中存在长度为奇数的基本回路。

若 α 不是基本回路，则其中存在相同的顶点，不妨设 $v_i = v_j, 0 \leqslant i < j \leqslant k$，于是 α 的子序列 $v_ie_{i+1}v_{i+1}e_{i+2}\cdots e_jv_j$ 构成一个回路，记为 α'，并且从 α 中删除 α' 后（保留顶点 v_i）仍然是一个回路，记为 α''，并且 α' 和 α'' 的长度之和为原始回路 α 的长度 k。因为 k 为正奇数，所以将其拆分成两个正整数之和后其中必定有一个正整数为奇数，即 α' 和 α'' 中必定有一个长度为奇数。取这个长度为奇数的回路，记为 α_1，则可以对 α_1 重复上述拆分回路的过程，得到长度为奇数的回路 $\alpha_2, \cdots\cdots$。注意到 α 的有限性，上述拆分回路的过程不可能无限进行，最后一次拆分过程结束后，所得到的回路就是长度为奇数的基本回路。

总之，G 中必定存在长度为奇数的基本回路。

□

3. 证明：在任何无向图中，任何奇数度的顶点都有通路到某个其他的奇数度顶点。

证明：

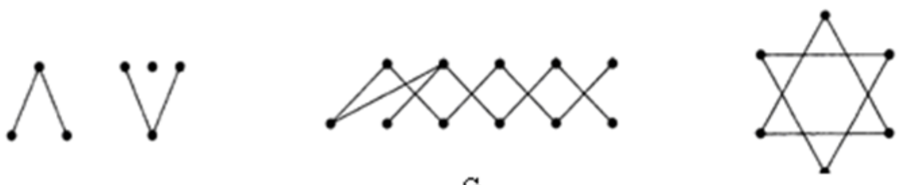
对于任何一个无向图 G，在其中任取一个奇数度的顶点 v，使用反证法。

假设对于所有以 v 为一端的通路，通路的另一端的顶点都是偶数度的，那么将 v 与这些顶点以及与它们相连的边全部取出，即构成 G 的一个连通分量 G'。在 G' 中，只有 v 是奇数度的，其它所有顶点都是偶数度的，那么 G' 的度数之和为奇数，不满足握手定理，因此这种情况不可能发生。

所以 v 必定有通路到某个其他的奇数度顶点。

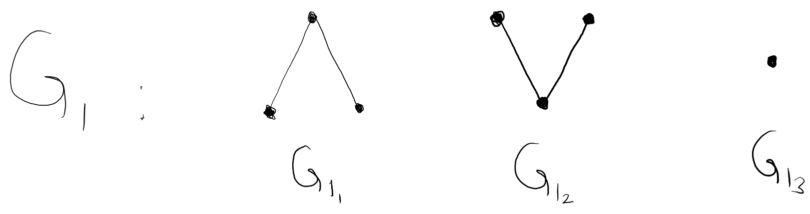
□

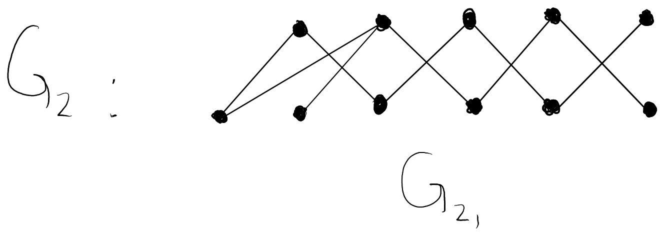
4. 分别求出下列三个无向图的各个连通分量。

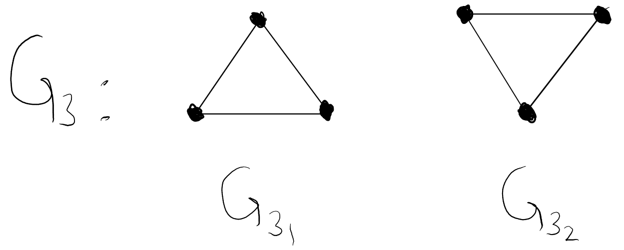


G_1 G_2 G_3

解：







□

7.4 最短通路和 Dijkstra 算法

7.5 图着色

1. 无向图的色数为 1 意味着什么?

   图中不存在边。

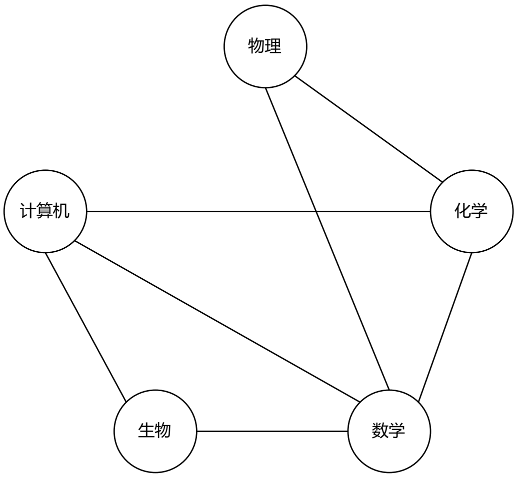
2. 一大学有 5 个专业委员会：物理、化学、数学、生物、计算机，6 位院士：B、C、D、G、S、W。专业委员会由院士组成，物理委员会有院士：C、S 和 W，化学委员会有院士：C、D 和 W；数学委员会有院士：B、C、G 和 S；生物委员会有院士：B 和 G；计算机委员会有院士：D 和 G。每个专业委员会每周开一小时例会，所有成员都不能缺席。如果某院士同时是两个专业委员会的成员，那么这两个专业委员会的例会就不能安排在同一个时间。现要为这些例会安排时间，希望它们的时间尽可能集中。问最少需要几个开会时间？请给出一种安排。

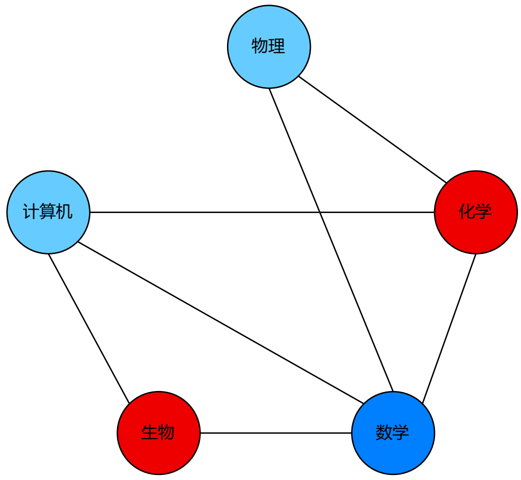
解：

首先将专业委员会和院士的关系整理成如下表格：

专业委员会	院士
物理	C、S、W
化学	C、D、W
数学	B、C、G、S
生物	B、G
计算机	D、G

之后根据“如果某院士同时是两个专业委员会的成员，那么这两个专业委员会的例会就不能安排在同一个时间”构造图，将专业委员会作为顶点，如果这两个专业委员会有相同的院士，那么就在这两个顶点之间连一条边，问题即可转化为图着色问题。于是构造出下方左图：





设此图为 G，由于存在 C_3 的结构，因此 $\chi(G) \geqslant 3$，又因为此图不是完全图也不是奇圈，所以根据 Brooks 定理，$\chi(G) \leqslant \Delta(G) = 4$。

那么尝试找到色数为 3 的着色方案，即上方右图。

因此最少需要 3 个开会时间，即物理和计算机同一时间开会，化学和生物同一时间开会，数学单独时间开会。

□

7.6　图的同构

1. 有 3 个顶点的不同构的简单无向图有多少个?

   3 个。(分别为一条边、两条边、三条边的情况)

2. 证明：若无向图 G 不是连通图，则其补图必为连通图。

证明 ：

设 G 的补图为 G'，下证 G' 是连通图。

在 G' 中任取两个顶点，若这两个顶点在 G 中不相邻，那么根据补图的定义，它们在 G' 中必定相邻，从而是连通的。

若这两个顶点（设为 v_1, v_2）在 G 中相邻，即它们在 G 中是连通的，而 G 不是连通图，所以必定存在另一个顶点 v_3，使得 v_1 与 v_3 不连通，v_2 与 v_3 不连通，从而 v_1 与 v_3 不相邻，v_2 与 v_3 不相邻。那么根据补图的定义，在 G' 中 v_1 与 v_3 相邻，v_2 与 v_3 相邻，所以 v_1 与 v_2 在 G' 中连通。

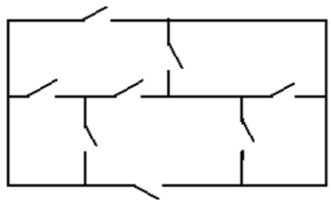
所以在 G' 中任取两个顶点，它们都是连通的，因此 G' 是连通图。

□

第八章　具有特殊性质的图

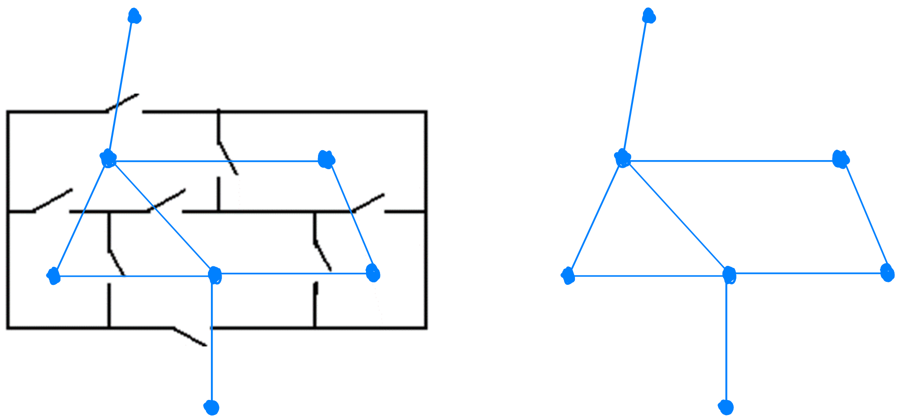
8.1　欧拉图

1. 一房子的平面图如图。问能否从前门进去，最后从后门出去，走过所有的门且每扇门只经过一次？



解：

将每个房间作为一个顶点，如果两个房间之间有门，则在这两个房间之间连一条边，同时将前门外的空间也作为一个顶点，后门外的空间也作为一个顶点，则可以构造出图如下：



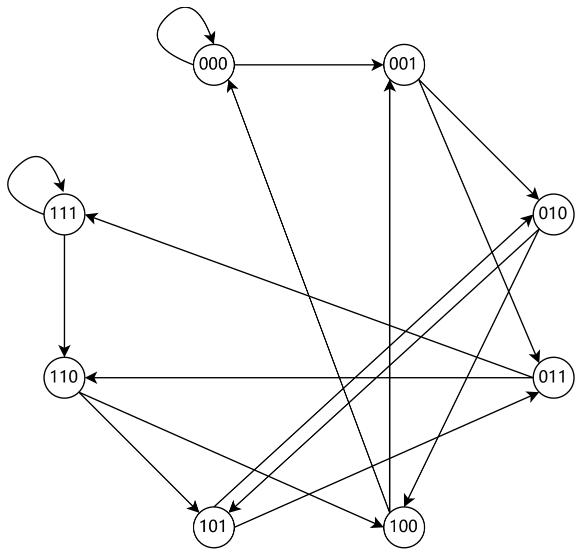
对于该图，只有前门外的顶点和后门外的顶点度数为 1，是奇数，其它顶点的度数都是偶数，因此存在从前门外顶点到后门外顶点的欧拉通路，因为门与图中的边对应，所以能从前门进去，最后从后门出去，走过所有的门且每扇门只经过一次。

□

2. 对于有 16 个扇区和 4 个探测器的磁鼓，给出一种合理的 0-1 赋值。

解：

以所有的 3 位二进制串为顶点，对于两个二进制串，如果前一个二进制串的后 2 位等于后一个二进制串的前 2 位，则从前一个二进制串到后一个二进制串连一条有向边。可以构造出图如下：



值得注意的是，上图也可以看成是数字逻辑电路中 3 位移位寄存器的状态转换图。

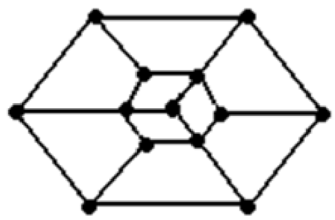
在上图中寻找到一条欧拉回路：110 → 100 → 000 → 000 → 001 → 011 → 111 → 111 → 110 → 101 → 010 → 100 → 001 → 010 → 101 → 011 → 110。

依次选取这条欧拉回路所经过的每个节点（终点除外）的最后一位，则可得到一个满足要求的 0-1 赋值为 0000111101001011。

□

8.2 哈密顿图

1. 说明下图不是哈密顿图。



由于在此图中找不到哈密顿回路，所以此图不是哈密顿图。

2. * 证明任意竞赛图都有有向哈密顿通路。

不会。

3. 为了测试计算机网络上的所有连接和设备，可以在网络上发一个诊断消息。为了测试所有的连接，应当使用什么种类的通路？为了测试所有的设备呢？

为了测试所有的连接，应当使用欧拉通路；为了测试所有的设备，应当使用哈密顿通路。

8.3 平面图

1. 设简单连通图 G 有 n 个顶点、e 条边。若 G 是平面图，请证明：$e \leqslant 3n-6$。

证明：

因为 G 是简单图，所以其面的次数都不小于 3，根据欧拉公式的推论，有

$$e \leqslant \frac{3}{3-2} \times (n-2) = 3n-6$$

□

2. 若简单连通图 G 有 n 个顶点、e 条边，则 G 的厚度至少为 $\lceil e/(3n-6) \rceil$。(简单图 G 的厚度是指 G 的平面子图的最小个数，这些子图的并是 G。)

证明：

设 G 的厚度为 m,则可以将 G 看做 m 个平面子图的并,将这些平面子图设为 $G_1, G_2, \ldots G_m$，则 $G = \bigcup_{i=1}^{m} G_i$。对 $\forall i = 1, 2, \ldots, m$，设 G_i 的顶点数为 n_i，边数为 e_i。则根据第 平面图 题，有 $0 < e_i \leqslant 3n_i - 6$，所以

$$\forall i = 1, 2, \ldots, m, \quad e_i \leqslant 3n_i - 6 \leqslant 3n - 6$$

对不等式进行求和可得

$$e \leqslant \sum_{i=1}^{m} e_i \leqslant \sum_{i=1}^{m} (3n-6) = m(3n-6)$$

所以有

$$m \geqslant \frac{e}{3n-6}$$

注意到 G 的厚度 m 为整数，所以 G 的厚度至少为 $\lceil e/(3n-6) \rceil$。

□