《随机过程》第二周作业

练习题 1.3

1. 设 X 是连续型非负随机变量，证明 $L_X(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 内是一致连续的。

证明：

设 X 的概率密度函数为 $p(x)$。使用点列式等价定义，$\forall t_{1n}, t_{2n} \in [0,+\infty)$ 且 $|t_{1n}-t_{2n}| \to 0$

$$\begin{aligned}
&|L_X(t_{1n}) - L_X(t_{2n})| = \left|Ee^{-t_{1n}X} - Ee^{-t_{2n}X}\right| = \left|E(e^{-t_{1n}X} - e^{-t_{2n}X})\right| \\
&= \left|\int_0^{+\infty} (e^{-t_{1n}x} - e^{-t_{2n}x})p(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_0^{+\infty} e^{-t_{1n}x}(1-e^{(t_{1n}-t_{2n})x})p(x)\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \left|\int_0^{+\infty} (1-e^{(t_{1n}-t_{2n})x})p(x)\mathrm{d}x\right|
\end{aligned}$$

根据积分中值定理，$\exists \xi \in [0,+\infty)$，使得

$$\left|\int_0^{+\infty} (1-e^{(t_{1n}-t_{2n})x})p(x)\mathrm{d}x\right| = (1-e^{(t_{1n}-t_{2n})\xi})\int_0^{+\infty} p(x)\mathrm{d}x = 1-e^{(t_{1n}-t_{2n})x}$$

因为 $|t_{1n}-t_{2n}| \to 0$，所以 $1-e^{(t_{1n}-t_{2n})x} \to 0$，因此 $|L_X(t_{1n}-t_{2n})| \to 0$，从而 $L_X(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 内是一致收敛的。

□

5. 设独立同分布的标准正态分布随机变量簇 $W_m, m > 1$ 与 $\{N(n), n \geqslant 1\}$ 独立，其中 $N(n)$ 服从泊松分布 $P(n)$。令 $Y_n = \sum_{k=1}^{N(n)} W_k$。求 Y_n 的特征函数，并证明 $n \to +\infty$ 时 $\dfrac{Y_n}{\sqrt{n}}$ 依分布收敛到一个服从标准正态分布的随机变量。

解：

Y_n 的特征函数为

$$\psi_{Y_n}(t) = Ee^{itY_n} = Ee^{it\sum_{k=1}^{N(n)} W_k} = Ee^{\sum_{k=1}^{N(n)} itW_k} = E\prod_{k=1}^{N(n)} e^{itW_k}$$

根据重期望公式，

$$\text{上式} = E\left(E\left(\prod_{k=1}^{N(n)} e^{itW_k} \middle| N(n) = p\right)\right)$$

由于 W_k 独立同分布且服从标准正态分布，所以

$$E\left(\prod_{k=1}^{N(n)} e^{itW_k} \middle| N(n) = p\right) = \prod_{k=1}^{p} Ee^{itW_k} = \prod_{k=1}^{p} \psi_{W_1}(t) = [\psi_{W_1}(t)]^p = \left[e^{-\frac{t^2}{2}}\right]^p = e^{-\frac{pt^2}{2}}$$

所以

$$\psi_{Y_n}(t) = E\left(e^{-\frac{t^2 N(n)}{2}}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{t^2 k}{2}} \frac{n^k}{k!} e^{-n}$$

□

证明：

根据特征函数的性质，

$$\psi_{\frac{Y_n}{\sqrt{n}}}(t)=\psi_{Y_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\frac{\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2\cdot k}{2}}\frac{n^k}{k!}e^{-n}=e^{-n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n^k e^{-\frac{kt^2}{2n}}}{k!}$$

当 $n\to+\infty$ 时上式 $\to e^{-\frac{t^2}{2}}$，即 $\frac{Y_n}{\sqrt{n}}$ 的特征函数收敛到标准正态分布的特征函数。根据特征函数的唯一性，则 $n\to+\infty$ 时 $\frac{Y_n}{\sqrt{n}}$ 依分布收敛到一个服从标准正态分布的随机变量。

□

7. 若随机变量 X 的分布列为 $P(X=n)=\frac{n}{2^{n+1}},n\geqslant 1$，求 X 的概率母函数 $\phi(s)$。

解：

$$\phi(s)=Es^X=\sum_{n=1}^{\infty}s^n\cdot\frac{n}{2^{n+1}}=\frac{s}{(s-2)^2}\ ,\quad s\in[-1,1]$$

□

8. 已知概率母函数 $\phi(s)=s+\frac{1}{1+\gamma}(1-s)^{1+\gamma},\gamma\in(0,1]$，求对应的概率分布列。

解：

$$P(X=k)=\frac{\phi^{(k)}(0)}{k!}$$

对 $\phi(s)$ 求各阶导数：所以

$$\phi^{(k)}(x)=\begin{cases}s+\frac{1}{1+\gamma}(1-s)^{1+\gamma}, & k=0\\ 1-(1-s)^{\gamma}, & k=1\\ (-1)^k(1-s)^{\gamma-k+1}\prod_{i=0}^{k-2}(\gamma-i), & k\geqslant 2\end{cases};\quad \phi^{(k)}(0)=\begin{cases}\frac{1}{1+\gamma}, & k=0\\ 0, & k=1\\ (-1)^k\prod_{i=0}^{k-2}(\gamma-i), & k\geqslant 2\end{cases}$$

所以对应的概率分布列为

$$P(X=k)=\begin{cases}\frac{1}{1+\gamma}, & k=0\\ 0, & k=1\\ \frac{(-1)^k}{k!}\prod_{i=0}^{k-2}(\gamma-i), & k\geqslant 2\end{cases}$$

□

练习题 1.4

1. 若存在随机变量 X 使得随机序列 $\dfrac{S_n}{n} \xrightarrow{a.s.} X$ 成立，而且非负整数值随机序列 $N_n \xrightarrow{a.s.} \infty$ 成立。证明 $\dfrac{S_{N_n}}{N_n} \xrightarrow{a.s.} X$。

证明：

对于 $\forall \varepsilon > 0$，由 $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{a.s.} X$ 的等价定义，$\exists A \in \Omega$ 满足 $P(A) = 0$，对 $\forall \omega \in \Omega A$ 以及 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N = N(\varepsilon, \omega)$，使得当 $n > N$ 时 $\left|\frac{S_n(\omega)}{n} - X(\omega)\right| < \varepsilon$

对于上述的 N，由 $N_n \xrightarrow{a.s.} \infty$ 的等价定义，$\exists A' \in \Omega$ 满足 $P(A') = 0$，对 $\forall \omega' \in \Omega A$，$\exists M = M(\varepsilon, \omega)$，使得当 $n > M$ 时 $N_n(\omega') > N$，再由上述叙述可知 $\left|\dfrac{S_{N_n(\omega')}(\omega)}{N_n(\omega')} - X(\omega)\right| < \varepsilon$

因此 $\dfrac{S_{N_n}}{N_n} \xrightarrow{a.s.} X$ □

2. 证明：若对任意 $\varepsilon > 0$，存在 N 使得当 $n > N$ 时 $P(|X_n - X| < \varepsilon) = 1$，那么 $X_n \xrightarrow{a.s.} X$。举例说明逆命题不成立。

证明：

由于 $P(|X_n - X| < \varepsilon) = 1 \Rightarrow P(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) = 0$，题中条件可转换为

$$\text{对}\forall \varepsilon > 0, P\left(\bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} \{|X_n - X| \geqslant \varepsilon\}\right) = 0$$

所以 $X_n \xrightarrow{a.s.} X$。

□

当 $P(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) = 0$ 但 $P(|X_n - X| < \varepsilon) \neq 1$ 时，逆命题不成立。

4. 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续有界，单调上升且 $f(0) = 0$，证明随机变量 X_n 依概率收敛于 0 当且仅当 $\lim\limits_{n\to\infty} E(f(|X_n|)) = 0$。

证明：

若 $X_n \xrightarrow{P} 0$，则 $\forall \varepsilon > 0, P(|X_n| > \varepsilon) \to 0$，由于 $f(x)$ 的单调性，$P(f(|X_n|) > f(\varepsilon)) \to 0$。令 $\varepsilon \to 0$，则 $f(\varepsilon) \to f(0) = 0$，所以 $P(f(|X_n|) > 0) \to 0$。

因为 $|X_n| \geqslant 0$，且 $f(x)$ 单调上升且 $f(0) = 0$，所以 $f(|X_n|) \geqslant 0$，因此 $P(f(|X_n|) = 0) \to 1$。

$f(|X_n|)$ 在 0 处的概率趋向于 1，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} E(f\,|X_n|) = 0$。

另一方向：

若 $\lim\limits_{n\to\infty} E(f(|X_n|)) = 0$，由于 $f(|X_n|)$ 是非负随机变量，所以期望为 0 等价于在 0 处的概率为 1，即 $\lim\limits_{n\to\infty} P(f(|X_n|) = 0) = 1$，即 $P(f(|X_n|) = 0) \to 1$。

由于 $f(|X_n|) \geqslant 0$，所以 $P(f(|X_n|) > 0) \to 0$。

再根据 $f(x)$ 的单调性，$P(|X_n| > 0) \to 0$。

因此 $\forall \varepsilon > 0, P(|X_n| > \varepsilon) \to 0$，即 X_n 依概率收敛于 0。 □

5. 设 $\{X_k; k \geqslant 1\}$ 为一列相互独立随机变量，而且对任意 $k \geqslant 1$，$E(X_k) = 0$，$\mathrm{Var}(X_k) = k$。对任意 $n \geqslant 1$，令 $Y_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{X_k}{k}$。证明对任意 $r > \dfrac{1}{2}$，当 $n \to \infty$ 时 $\dfrac{Y_n}{n^r}$ 几乎必然收敛到 0。

证明：

要证 $\dfrac{Y_n}{n^r} \xrightarrow{a.s.} 0$，即证 $\forall \varepsilon > 0, \sum\limits_{n=1}^{\infty} P\left(\left|\dfrac{Y_n}{n^r}\right| > \varepsilon\right) < \infty$。

由马尔可夫不等式，

$$P\left(\left|\frac{Y_n}{n^r}\right| > \varepsilon\right) < \frac{E\left|\frac{Y_n}{n^r}\right|}{\varepsilon} = \frac{E\left|\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{X_k}{k}\right|}{n^r \varepsilon}$$

由于 $\mathrm{Var}(X_k) = k, std(X_k) = \sqrt{k}$ 且 $E(X_k) = 0$, 所以 $std(\frac{X_k}{k}) = \frac{1}{\sqrt{k}}$, 所以 $\mathrm{Var}(\frac{X_k}{k}) = \frac{1}{k}$。

$$E\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{k}\right| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}}\right| = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

所以

$$P\left(\left|\frac{Y_n}{n^r}\right| > \varepsilon\right) < \frac{\sqrt{n}}{n^r \varepsilon} = n^{\frac{1}{2}-r} \varepsilon$$

对 $\forall r > \frac{1}{2}$，当 $n \to \infty$ 时 $n^{\frac{1}{2}-r} \to 0$。所以 $\forall \varepsilon > 0, \sum\limits_{n=1}^{\infty} P\left(\left|\dfrac{Y_n}{n^r}\right| > \varepsilon\right)$ 收敛。

因此 $\forall r > \frac{1}{2}$，当 $n \to \infty$ 时 $\dfrac{Y_n}{n^r}$ 几乎必然收敛到 0。

□