《随机过程》2 月 26 日作业

1. 设 X 为 k 阶矩存在的非负连续型随机变量（$k \in \mathbb{Z}^+$），证明：

$$E(X^k) = \int_0^{+\infty} kx^{k-1} P(X > x)\mathrm{d}x$$

试推广一下该结论。

证明：

设 X 的概率密度函数为 $p(x), x \in (-\infty, +\infty)$

根据数学期望的定义，同时注意到 X 是非负连续型随机变量，可知

$$E(X^k) = \int_0^{+\infty} x^k p(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^x ku^{k-1}\mathrm{d}u\right) p(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\int_0^x ku^{k-1}p(x)\mathrm{d}u\mathrm{d}x$$

交换积分次序，

$$E(X^k) = \int_0^{+\infty}\int_u^{+\infty} ku^{k-1}p(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} ku^{k-1}P(X>u)\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} kx^{k-1}P(X>x)\mathrm{d}x$$

□

推广该结论可得：设 $f(X)$ 为数学期望存在的非负连续型随机变量，且 $f(x)$ 存在导函数 $f'(x)$，则

$$E(f(X)) = \int_0^{+\infty} f'(x)P(X>x)\mathrm{d}x$$

2. 若连续型随机变量 X 与 Y 相互独立，其概率密度函数分别为 $p_X(\cdot)$ 和 $P_Y(\cdot)$，证明：

$$E(\Phi(X,Y)|X) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(X,y)p_Y(y)\mathrm{d}y$$

证明：

直接根据定义，在 $X=x$ 的条件下对 Y 求数学期望即可：

$$E(\Phi(x,Y)|X=x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x,y)p_Y(y)\mathrm{d}y$$

所以

$$E(\Phi(X,Y)|X) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(X,y)p_Y(y)\mathrm{d}y$$

□

3. 从 1 到 9 中有放回地抽取数字，每次抽一个，直到奇数和偶数都被抽到时位置。求该过程中抽到奇数的次数在全部抽取次数中占比的期望（结果保留 4 位有效数字）。

解：

设随机变量 X 表示首次抽到奇数时的总次数，则 $X \sim \mathrm{Ge}(\frac{5}{9})$；设随机变量 Y 表示首次抽到偶数时的总次数，则 $Y \sim \mathrm{Ge}(\frac{4}{9})$。设随机变量 Z 表示该过程中抽到奇数的次数在全部抽取次数中的占比，则 EZ 为所求的期望。

根据几何分布的数学期望可知，$EX = \frac{1}{\frac{5}{9}} = \frac{9}{5}, EY = \frac{1}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{4}$。

根据重期望公式，$EZ = E(E(Z|X))$，下面计算 $E(Z|X)$

$$E(Z|X=x) = \begin{cases} \frac{EY}{EY+1} = \frac{\frac{9}{4}}{\frac{9}{4}+1} = \frac{9}{13}, & x = 1 \\ \frac{1}{EX} = \frac{1}{\frac{9}{5}} = \frac{5}{9}, & x > 1 \end{cases}$$

再对 X 求期望，

$$EZ = E(E(Z|X)) = \frac{9}{13} \times \frac{5}{9} + \frac{5}{9} \times (1 - \frac{5}{9}) = \frac{665}{1053} \approx 0.6315$$

□

4. 设闯入果园的猩猩数 X 服从参数为 $\lambda(>0)$ 的 Poisson 分布,每只猩猩独立地以概率 $p(\in(0,1))$ 成功地抢到香蕉，而以概率 $q = 1-p$ 没有抢到。请分别求闯入果园且成功抢到香蕉的猩猩数 Y 和闯入果园但没抢到香蕉的猩猩数 Z 的分布，并判断 Y 和 Z 是否独立。

解：

X 的分布列为 $P(X=k) = \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$;

所以 Y 的分布列为 $P(Y=k) = \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\displaystyle\sum_{n=k}^{\infty} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$;

Z 的分布列为 $P(Z=k) = \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\displaystyle\sum_{n=k}^{\infty} C_n^k (1-p)^k p^{n-k}$

取 $k=0$ 时来验证 Y 和 Z 是否独立。(已知 $p \in (0,1)$)

$$P(Y=0) = e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}(1-p)^n = e^{-\lambda} \cdot \frac{1}{p}$$

$$P(Z=0) = e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}p^n = e^{-\lambda} \cdot \frac{1}{1-p}$$

$$P(Y=0, Z=0) = P(X=0) = e^{-\lambda}$$

所以

$$P(Y=0) \cdot P(Z=0) \neq P(Y=0, Z=0)$$

因此 Y 和 Z 不独立。 □

5. 重复抛一枚硬币，假设每次试验是相互独立的，出现正面的概率为 $p(\in(0,1))$。令 T_n 是首次出现连续 n 次正面的时刻。求 T_n 的概率母函数。

解：

设 Y 表示首次出现反面的时刻，则 $Y \sim \mathrm{Ge}(1-p)$。则 T_n 的概率母函数为：

$$\begin{aligned}\phi_{T_n}(s) = E(s^{T_n}) &= s^n \sum_{i=n+1}^{\infty} P(Y=i) + \sum_{i=1}^{n} E(s^{i+T_n}) P(Y=i) \\ &= s^n P(Y \geqslant n+1) + \sum_{i=1}^{n} s^i E(s^{T_n}) P(Y=i) \\ &= s^n p^n + E(s^{T_n}) E(s^Y)\end{aligned}$$

即可解得

$$E(s^{T_n}) = \frac{s^n p^n}{1 - E(s^Y)}$$

由于 $s \in [-1, 1]$, $p \in (-1, 1)$，所以 $ps \neq 1$，因此

$$E(s^Y) = \sum_{i=1}^{n} s^i P(Y=i) = \sum_{i=1}^{n} s^i p^{i-1}(1-p) = -\frac{s(p-1)(p^n s^n - 1)}{ps - 1}$$

所以

$$E(s^{T_n}) = \frac{s^n p^n}{1 + \frac{s(p-1)(p^n s^n - 1)}{ps-1}} = \frac{p^n s^n (ps-1)}{-p^n s^{n+1} + p^{n+1} s^{n+1} + s - 1}$$

□

6. 设 $X_1, X_2, \cdots$ 为独立同分布的非负整数值随机变量序列，其中 X_1 的特征函数、Laplace 变换和概率母函数分别为 $\Psi_X(t)$、$L_X(\theta)$ 和 $\phi_X(s)$。而 N 是与之独立的非负整数值随机变量，其特征函数、Laplace 变换和概率母函数分别为 $\Psi_N(t)$、$L_N(\theta)$ 和 $\phi_N(s)$。令 $Z = \sum_{n=1}^{N} X_n$，请分别计算 Z 的特征函数、Laplace 变换和概率母函数。

解：

使用重期望公式，Z 的特征函数可转化为

$$Ee^{itZ} = E(E(e^{itZ}|N))$$

而

$$E(e^{itZ}|N=k) = E\left(e^{it\sum_{n=1}^{k} X_n}\right) = E\left(\prod_{n=1}^{k} e^{itX_n}\right)$$

因为 $X_1, X_2, \cdots$ 独立同分布，所以

$$\text{上式} = \prod_{n=1}^{k} E(e^{itX_n}) = \prod_{n=1}^{k} \Psi_X(t) = [\Psi_X(t)]^k$$

根据概率母函数的反演公式，

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+, \forall k \in \mathbb{Z}^+, P(N=k) = \frac{\phi_N^{(k)}(0)}{k!}$$

所以 Z 的特征函数为

$$\Psi_Z(t) = Ee^{itZ} = E(E(e^{itZ}|N)) = \sum_{k=1}^{\infty} E(e^{itZ}|N=k) P(N=k) = \sum_{k=1}^{\infty} [\Psi_X(t)]^k \cdot \frac{\phi_N^{(k)}(0)}{k!}$$

同理，Z 的 Laplace 变换为

$$L_Z(\theta) = E(e^{-\theta Z}) = \sum_{k=1}^{\infty} [L_X(\theta)]^k \cdot \frac{\phi_N^{(k)}(0)}{k!}$$

Z 的概率母函数为

$$\phi_Z(s) = E(s^Z) = \sum_{k=1}^{\infty} [\phi_X(s)]^k \cdot \frac{\phi_N^{(k)}(0)}{k!}$$

□