1.3 集合运算的性质

9. 设A、B、C是集合，证明下列结论：

(3) 若$A\cap B=\varnothing$，则$A-B=A$

证明：

$$\begin{aligned}
&\because A\cap B=\varnothing\\
&\therefore \forall x\in A \implies x\notin B\\
&\therefore \forall x\in A \implies x\in \bar{B}\\
&\therefore A\subseteq \bar{B}\\
&\therefore A\cap \bar{B}=A\\
&\therefore A-B=A
\end{aligned}$$

□

11. 指出下列集合等式成立的充分必要条件，其中A、B和C是集合：

(5) $(A-B)\cap(A-C)=\varnothing$

$$(A-B)\cap(A-C)=A\cap\bar{B}\cap A\cap\bar{C}=A\cap\bar{B}\cap\bar{C}=A-B-C=\varnothing$$

$$\iff A-B-C=\varnothing$$

13. 设A和B是集合，集合运算对称差$\oplus$定义如下：$A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)$.
证明下列恒等式，其中A、B和C是任意集合：

(5) $A\oplus B=(A\cup B)-(A\cap B)$

证明：

$$\begin{aligned}
(A\cup B)-(A\cap B)&=(A\cup B)\cap\overline{A\cap B}\\
&=(A\cup B)\cap(\bar{A}\cup\bar{B})\\
&=((A\cup B)\cap\bar{A})\cup((A\cup B)\cap\bar{B})\\
&=(B\cap\bar{A})\cup(A\cap\bar{B})\\
&=(A-B)\cup(B-A)\\
&=A\oplus B
\end{aligned}$$

□

21. 设 A、B、C 和 D 是任意集合. 请证明：

(1) $(A\times C)\cap(B\times D)=(A\cap B)\times(C\cap D)$

证明：

$$\begin{aligned}
\forall(x,y),\quad &(x,y)\in(A\times C)\cap(B\times D)\\
\iff &(x,y)\in(A\times C)\text{且}(x,y)\in(B\times D)\\
\iff &x\in A,y\in C\text{且}x\in B,y\in D\\
\iff &x\in A\cap B\text{且}y\in C\cap D\\
\iff &(x,y)\in(A\cap B)\times(C\cap D)\\
\therefore\quad &(A\times C)\cap(B\times D)=(A\cap B)\times(C\cap D)
\end{aligned}$$

□

22. 设 $\{A_\beta|\beta\in B\}$ 是以 B 为下标集的集合族. 证明下列恒等式.

(1) $\overline{\bigcup\limits_{\beta\in B}A_\beta}=\bigcap\limits_{\beta\in B}\overline{A_\beta}$

证明 :

$$
\begin{aligned}
&\forall x,\quad x\in\overline{\bigcup_{\beta\in B}A_\beta}\\
&\iff x\notin\bigcup_{\beta\in B}A_\beta\\
&\iff \neg(\exists\beta\in B,x\in A_\beta)\\
&\iff \forall\beta\in B,x\notin A_\beta\\
&\iff \forall\beta\in B,x\in\overline{A_\beta}\\
&\iff x\in\bigcap_{\beta\in B}\overline{A_\beta}\\
&\therefore\quad \overline{\bigcup_{\beta\in B}A_\beta}=\bigcap_{\beta\in B}\overline{A_\beta}
\end{aligned}
$$

□

24. 设集合族 $\{A_n|n\in\mathbb{N}\}$，令 $B_0=A_0$，$B_n=A_n-\bigcup\limits_{k=0}^{n-1}A_k(n>0)$. 证明：

(2) $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}A_n=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}B_n$

证明 ：

$$
\begin{aligned}
&\because B_n = A_n - \bigcup_{k=0}^{n-1} A_k (n > 0) \\
&\therefore \forall n > 0, B_n \in A_n \\
&\forall x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \iff \exists n_0 \in \mathbb{N}, x \in B_{n_0} \implies x \in A_{n_0} \\
&\therefore \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \supseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \\
&\forall x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n, \text{则} \exists n \in \mathbb{N}, x \in A_n \\
&\text{设} C_x = \{n | x \in A_n\} \\
&\text{设} n_1 = \min C_x \\
&\text{则} x \in A_{n_1} \text{且} \forall n_2 < n_1, x \notin A_{n_2} \\
&\therefore x \notin \bigcup_{k=0}^{n_1-1} A_k \\
&\therefore x \in A_{n_1} - \bigcup_{k=0}^{n_1-1} A_k \\
&\therefore x \in B_{n_1} \\
&\therefore x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \\
&\therefore \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \\
&\therefore \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n
\end{aligned}
$$

□

1.4 有限集合的计数

26. *以 1 开头或者以 00 结束的不同的字节（8 位的二进制串）有多少个？*

设A为以1开头的不同的字节，B为以00结束的不同的字节。

则$\left|\text{以1开头或者以00结束的不同的字节}\right| = |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 2^7 + 2^6 - 2^5 = 160$

27. 在$1 \sim 200$的正整数中，

(3) 含因子3或5，但不同时含因子3和5的正整数共有多少个？

$$
\begin{aligned}
&\text{设}A\text{为}1 \sim 200\text{中含因子3的正整数，}B\text{为}1 \sim 200\text{中含因子5的正整数} \\
&\text{则}\left|\text{在}1 \sim 200\text{的正整数中含因子3或5，但不同时含因子3和5的正整数}\right| \\
&= |A \oplus B| = |A| + |B| - 2\,|A \cap B| = 66 + 40 - 2 * 13 = 80
\end{aligned}
$$

* 用 JavaScript 再验证一下：

```
> a =[]
[]
```

```
> for (let i = 1; i<=200; i++){
... a.push(i);
... }
>  a.reduce((out, cur) => {
... if ((cur%3==0 || cur%5==0) && cur%15!=0) out.push(cur);
... return out;
... }, Array()).length
80
```

(5) 与15互素的正整数（即与15之间的最大公因子为1的那些正整数）共有多少个？

A与B的定义和上题相同

则$\left|\text{在}1\sim 200\text{的正整数中与}15\text{互素的正整数}\right|$

$= |1\sim 200\text{的正整数}| - |A\cup B|$

$= 200 - (|A| + |B| - |A\cap B|) = 200 - (66 + 40 - 13) = 107$