《数理统计》作业

岳锦鹏

2024 年 2 月 27 日——2024 年 6 月 18 日

目录

第五章　统计量及其分布

5.1　总体与样本

2. 某市要调查成年男子的吸烟率，特聘请 50 名统计专业本科生作街头随机调查，要求每位学生调查 100 名成年男子，问该项调查的总体和样本分别是什么，总体用什么分布描述为宜?

总体是成年男子，样本是 $50 \times 100 = 5000$ 名成年男子。总体应该用正态分布描述为宜。

4. 为估计鱼塘里有多少条鱼，一位统计学家设计了一个方案如下：从鱼塘中打捞出一网鱼，计有 n 条，涂上不会被水冲刷掉的红漆后放回，一天后再从鱼塘里打捞一网，发现共有 m 条鱼，而涂有红漆的鱼则有 k 条，你能估计出鱼塘里大概有多少鱼吗？该问题的总体和样本又分别是什么呢?

鱼塘里大概有 $\frac{m}{k} \cdot n$ 条鱼。将打捞鱼看做随机抽样的过程，则该问题的总体是鱼塘里的鱼，样本是打捞出的鱼。

5. 某厂生产的电容器的使用寿命服从指数分布，为了解其平均寿命，从中抽出 n 件产品测其实际使用寿命，试说明什么是总体，什么是样本，并指出样本的分布.

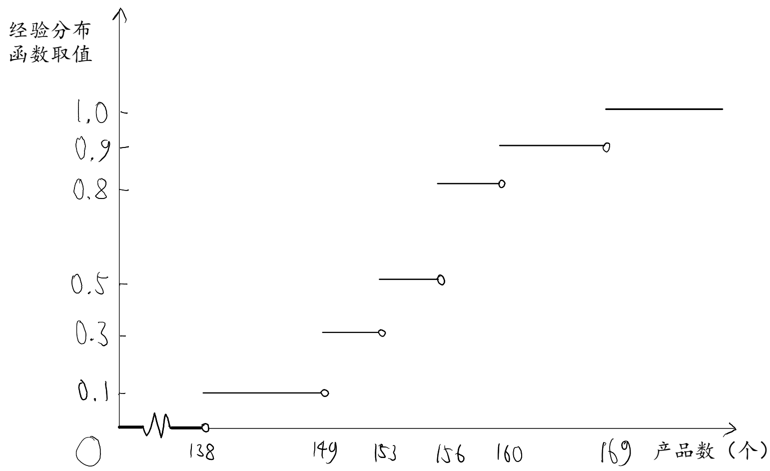
总体是某厂生产的电容器，样本是抽出的 n 件产品，样本近似服从指数分布。

5.2　样本数据的整理与显示

1. 以下是某工厂通过抽样调查得到的 10 名工人一周内生产的产品数，试由这批数据构造经验分布函数并作图。

$$149 \quad 156 \quad 160 \quad 138 \quad 149 \quad 153 \quad 153 \quad 169 \quad 156 \quad 156$$

先将数据排序：138 149*2 153*2 156*3 160 169



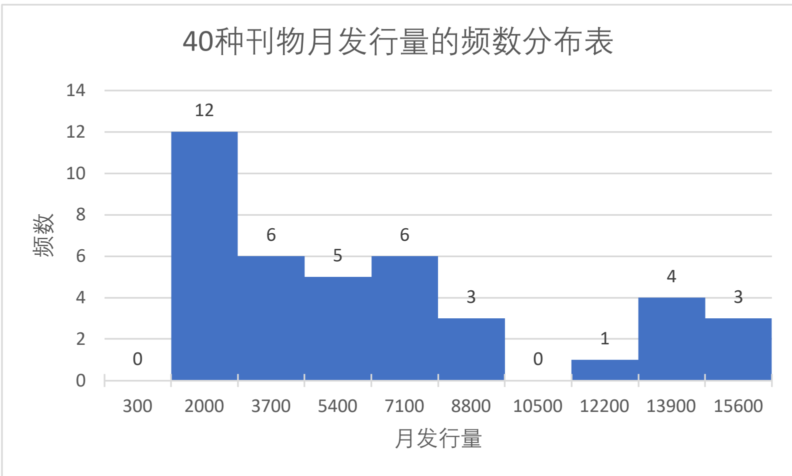
5. 40 种刊物的月发行量（单位百册）如下：

5954 5022 14667 6582 6870 1840 2662 4508 1208 3852 618 3008
1268 1978 7963 2048 3077 993 353 14263 1714 11127 6926 2047 714
5923 6006 14267 1697 13876 4001 2280 1223 12579 13588 7315 4538
13304 1615 8612

(1) 建立该批数据的频数分布表，取组距为 1700（百册）；

(2) 画出直方图。

下限	上限	频率
300	1999	12
2000	3699	6
3700	5399	5
5400	7099	6
7100	8799	3
8800	10499	0
10500	12199	1
12200	13899	4
13900	15599	3



（频数分布表和直方图均通过 Excel 完成，坐标轴的标签无法与刻度对齐）

6. 对下列数据构造茎叶图：

472 425 447 377 341 369 412 399 400 382 366 425 399 398 423
384 418 392 372 418 374 385 439 408 429 428 430 413 405 381
403 479 381 443 441 433 399 379 386 387

34	1
35	
36	6 9
37	2 4 7 9
38	1 1 2 4 5 6 7
39	2 8 9 9 9
40	0 3 5 8
41	2 3 8 8
42	3 5 5 8 9
43	0 3 9
44	1 3 7
45	
46	
47	2 9

5.3 统计量及其分布

1. 在一本书上我们随机地检查了 10 页，发现每页上的错误数为：

$$4 \quad 5 \quad 6 \quad 0 \quad 3 \quad 1 \quad 4 \quad 2 \quad 1 \quad 4$$

试计算其样本均值、样本方差和样本标准差。

解：

$$\bar{x} = \frac{4+5+6+0+3+1+4+2+1+4}{10} = 3$$

$$s^2 = \frac{1}{10-1}\sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{34}{9} \approx 3.778$$

$$s = \sqrt{\frac{34}{9}} \approx 1.944$$

□

2. 证明：对任意常数 c, d，有

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - c)(y_i - d) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) + n(\bar{x} - c)(\bar{y} - d)$$

证明：

根据性质 $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}$, $\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} \bar{y}$ 可得

$$\begin{aligned}
\text{右边} &= \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}) + \sum_{i=1}^{n}(\bar{x}-c)(\bar{y}-d) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}) + (\bar{x}-c)(\bar{y}-d)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n}(x_iy_i - \bar{x}y_i - \bar{y}x_i + \bar{x}\bar{y} + \bar{x}\bar{y} - \bar{x}d - \bar{y}c + cd) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_iy_i - \bar{x}\sum_{i=1}^{n} y_i - \bar{y}\sum_{i=1}^{n} x_i + n\bar{x}\bar{y} + n\bar{x}\bar{y} - n\bar{x}d - n\bar{y}c + ncd \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_iy_i - n\bar{x}\bar{y} - n\bar{y}\bar{x} + n\bar{x}\bar{y} + n\bar{x}\bar{y} - \sum_{i=1}^{n} x_id - \sum_{i=1}^{n} y_ic + \sum_{i=1}^{n} cd \\
&= \sum_{i=1}^{n}(x_iy_i - x_id - y_ic + cd) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(x_i-c)(y_i-d) = \text{左边}
\end{aligned}$$

□

3. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 和 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是两组样本观测值，且有如下关系:

$$y_i = 3x_i - 4, i = 1, 2, \cdots, n$$

试求样本均值 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$ 间的关系以及样本方差 s_x^2 和 s_y^2 间的关系。

解 :

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(3x_i-4) = 3\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - 4 = 3\bar{x} - 4$$

$$\begin{aligned}
s_y^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(3x_i-4-(3\bar{x}-4))^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}[3(x_i-\bar{x})]^2 \\
&= 9\cdot\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = 9s_x^2
\end{aligned}$$

□

5. 从同一总体中抽取两个容量分别为 n, m 的样本，样本均值分别为 $\bar{x}_1, \bar{x}_2$，样本方差分别为 s_1^2, s_2^2，将两组样本合并，其均值、方差分别为 $\bar{x}, s^2$，证明:

$$\bar{x} = \frac{n\bar{x}_1 + m\bar{x}_2}{n+m}$$

$$s^2 = \frac{(n-1)s_1^2 + (m-1)s_2^2}{n+m-1} + \frac{nm(\bar{x}_1-\bar{x}_2)^2}{(n+m)(n+m+1)}$$

证明：

$$\bar{x}=\frac{1}{n+m}\left(\sum_{i=1}^{n}x_{1_i}+\sum_{i=1}^{m}x_{2_i}\right)=\frac{n\bar{x}_1+m\bar{x}_2}{n+m}$$

$$\begin{aligned}
s^2&=\frac{1}{n+m-1}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-\bar{x})^2+\sum_{j=1}^{m}(x_{2j}-\bar{x})^2\right)\\
&=\frac{1}{n+m-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(x_{1i}-\frac{n\bar{x}_1+m\bar{x}_2}{n+m}\right)^2+\sum_{i=1}^{n}\left(x_{2j}-\frac{n\bar{x}_1+m\bar{x}_2}{n+m}\right)^2\right)\\
&=\frac{(n-1)s_1^2+(m-1)s_2^2}{n+m-1}+\frac{nm(\bar{x}_1-\bar{x}_2)^2}{(n+m)(n+m+1)}
\end{aligned}$$

□

8. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是来自 $U(-1,1)$ 的样本，试求 $E(\bar{x})$ 和 $\mathrm{Var}(\bar{x})$。

解：

设随机变量 $X\sim U(-1,1)$，则

$$E(\bar{x})=EX=\frac{-1+1}{2}=0$$

$$\mathrm{Var}(\bar{x})=\frac{\mathrm{Var}(X)}{n}=\frac{\frac{(-1-1)^2}{12}}{n}=\frac{1}{3n}$$

□

9. 设总体二阶矩存在，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是样本，证明 $x_i-\bar{x}$ 与 $x_j-\bar{x}$ $(i\neq j)$ 的相关系数为 $-(n-1)^{-1}$。

证明：

根据样本均值的性质，$E(x_i-\bar{x})=E(x_j-\bar{x})=0$。

设随机变量 X 表示从总体中抽出的一个样本，则 EX^2 存在。

$$E(x_i-\bar{x})(x_j-\bar{x})=E(x_ix_j-\bar{x}x_i-\bar{x}x_j+\bar{x}^2)=Ex_ix_j-\bar{x}Ex_i-\bar{x}Ex_j+\bar{x}^2$$

将 x_i 与 x_j 看作独立的两次抽样，则 $x_i,x_j\overset{\text{i.i.d.}}{\sim}X$，所以 $Ex_ix_j=Ex_iEx_j=(EX)^2$，$Ex_i=EX,Ex_j=EX$。所以

$$E(x_i-\bar{x})(x_j-\bar{x})=(EX)^2-2\bar{x}EX+\bar{x}^2=\frac{1}{1-n}=-(n-1)^{-1}$$

□

10. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为一个样本，$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ 是样本方差，试证:

$$\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i<j}(x_i-x_j)^2=s^2$$

证明：

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i<j}(x_i-x_j)^2=\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i<j}(x_i-\bar{x}+\bar{x}-x_j)^2\\
&=\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i<j}[(x_i-\bar{x})^2+2(x_i-\bar{x})(\bar{x}-x_j)+(\bar{x}-x_j)^2]\\
&=\frac{1}{n(n-1)}\cdot\frac{1}{2}\sum_{i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n}[(x_i-\bar{x})^2+2(x_i-\bar{x})(\bar{x}-x_j)+(\bar{x}-x_j)^2]\\
&=\frac{1}{2n(n-1)}\left[n\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+0+n\sum_{j=1}^{n}(x_j-\bar{x})^2\right]\\
&=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=s^2
\end{aligned}
$$

□

11. 设总体 4 阶中心距 $\nu_4=E[x-E(x)]^4$ 存在，试证：对样本方差 $s^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$，有

$$
\operatorname{Var}(s^2)=\frac{n(\nu-\sigma^4)}{(n-1)^2}-\frac{2(\nu_4-2\sigma^4)}{(n-1)^2}+\frac{\nu-3\sigma^4}{n(n-1)^2}
$$

其中 σ^2 为总体 X 的方差。

证明：

$$
\begin{aligned}
\text{右边}&=\frac{n^2\nu_4-n^2\sigma^4-2n\nu_4+4n\sigma^4+\nu_4-3\sigma^4}{n(n-1)^2}\\
&=\frac{\nu_4(n^2-2n+1)-\sigma^4(n^2-4n+3)}{n(n-1)^2}\\
&=\frac{\nu_4(n-1)^2-\sigma^4(n-1)(n-3)}{n(n-1)^2}\\
&=\frac{\nu_4}{n}-\frac{\sigma^4(n-3)}{n(n-1)}
\end{aligned}
$$

$$
\text{左边}=E(s^2)^2-(Es^2)^2=Es^4-(Es^2)^2=Es^4-\sigma^4
$$

实在证明不出来了。 □

12. 设总体 X 的 3 阶矩存在，若 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是取自该总体的简单随机样本，$\bar{x}$ 为样本均值，s^2 为样本方差，试证：$\operatorname{Cov}(\bar{x},s^2)=\dfrac{\nu_3}{n}$，其中 $\nu_3=E[x-E(x)]^3$。

证明：

$$
E\bar{x}=EX,Es^2=\operatorname{Var}X
$$

$$E(\bar{x}s^2) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right)$$

$$\operatorname{Var}\bar{x} = \frac{\operatorname{Var}X}{n}, \operatorname{Var}s^2 = \operatorname{Var}\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right)$$

也证明不出来了。 □

15. 从指数总体 $\operatorname{Exp}(\frac{1}{\theta})$ 抽取了 40 个样品，试求 $\bar{x}$ 的渐近分布。

解：

设随机变量 X 表示从总体中抽出的一个样本，则

$$EX = \frac{1}{\frac{1}{\theta}} = \theta,\ \operatorname{Var}X = \frac{1}{\left(\frac{1}{\theta}\right)^2} = \theta^2$$

所以 $\bar{x}$ 的渐近分布为 $N(\theta, \theta^2)$。 □

17. 设 $x_1, x_2, \cdots x_{20}$ 是从二点分布 $b(1,p)$ 抽取的样本，试求样本均值 $\bar{x}$ 的渐近分布。

解：

设随机变量 X 表示从总体中抽出的一个样本，则

$$EX = p,\ \operatorname{Var}X = p(1-p)$$

所以 $\bar{x}$ 的渐近分布为 $N(p, p(1-p))$。 □

23. 设总体 X 服从几何分布，即 $P(X=k) = pq^{k-1}, k = 1, 2, \cdots$，其中 $0 < p < 1, q = 1-p$，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为该总体的样本，求 $x_{(n)}, x_{(1)}$ 的概率分布。

解：

设总体 X 的概率密度函数为 $p(x)$，分布函数为 $F(x)$，则

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} pq^{k-1} = \frac{p - pq^{\lfloor x \rfloor}}{1-q}$$

$$p_{x_{(n)}}(x) = \frac{n!}{(n-1)!}[F(x)]^{n-1}p(x) = npq^{\lfloor x \rfloor - 1}\left[\frac{p - pq^{\lfloor x \rfloor}}{1-q}\right]^{n-1}$$

$$p_{x_{(1)}} = \frac{n!}{(n-1)!}[1 - F(x)]^{n-1}p(x) = npq^{\lfloor x \rfloor - 1}\left[1 - \frac{p - pq^{\lfloor x \rfloor}}{1-q}\right]^{n-1}$$

□

28. 设总体 X 的分布函数 $F(x)$ 是连续的，$x_{(1)}, x_{(2)}, \cdots, x_{(n)}$ 为取自此总体的次序统计量，设 $\eta_i = F(x_{(i)})$，试证：

(1) $\eta_1 \leqslant \eta_2 \leqslant \cdots \leqslant \eta_n$，且 η_i 是来自均匀分布 $U(0,1)$ 总体的次序统计量。

证明：

因为 $x_{(1)} \leqslant x_{(2)} \leqslant \cdots \leqslant x_{(n)}$ 且 $F(x)$ 单调，$\eta_i = F(x_{(i)})$，所以 $\eta_1 \leqslant \eta_2 \leqslant \cdots \leqslant \eta_n$。

□

(2) $E(\eta_i) = \dfrac{i}{n+1}$，$\mathrm{Var}(\eta_i) = \dfrac{i(n+1-i)}{(n+1)^2(n+2)}, 1 \leqslant i \leqslant n$

证明：

设总体的概率密度函数为 $p(x)$，则 η_i 的分布函数为

$$p_{(i)}(x) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}[F(x)]^{i-1}[1-F(x)]^{n-i}p(x)$$

$$\begin{aligned}
E(\eta_i) &= \sum_{i=1}^{n} F(x_{(i)})p_{(i)}(x_{(i)}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} F(x_{(i)})\frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}[F(x_{(i)})]^{i-1}[1-F(x_{(i)})]^{n-i}p(x) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}[F(x_{(i)})]^{i}[1-F(x_{(i)})]^{n-i}p(x)
\end{aligned}$$

$$\mathrm{Var}(\eta_i) =$$

实在是不会了。 □

(3) η_i 和 η_j 的协方差矩阵为 $\begin{bmatrix} \frac{a_1(1-a_1)}{n+2} & \frac{a_1(1-a_2)}{n+2} \\ \frac{a_1(1-a_2)}{n+2} & \frac{a_2(1-a_2)}{n+2} \end{bmatrix}$，其中 $a_1 = \dfrac{i}{n+1}, a_2 = \dfrac{j}{n+1}$。

证明：

$$E(\eta_i) = \frac{i}{n+1},\ E(\eta_j) = \frac{j}{n+1},\ E(\eta_i\eta_j) =$$

实在是不会了。 □

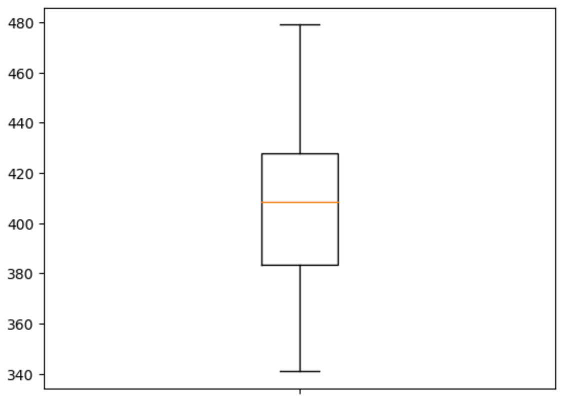
32. 设总体 X 的密度函数为 $p(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$，$x_{(1)} \leqslant x_{(2)} \leqslant \cdots \leqslant x_{(5)}$ 为容量为 5 的取自此总体的次序统计量，试证 $\dfrac{x_{(2)}}{x_{(4)}}$ 与 $x_{(4)}$ 相互独立。

证明：

根据相互独立的定理，需要证明 $\forall x,y$，$p_{\frac{x_{(2)}}{x_{(4)}}}(x)\cdot p_{x_{(4)}}(y)=p_{\frac{x_{(2)}}{x_{(4)}},x_{(4)}}(x,y)$，之后就不会了。 $\square$

35. 对下列数据构造箱线图：

472	425	447	377	341	369	412	419	400	382	366	425	399	398	423
384	418	392	372	418	374	385	439	428	429	428	430	413	405	381
403	479	381	443	441	433	419	379	386	387					



5.4 三大抽样分布

2. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是来自 $N(\mu,16)$ 的样本，问 n 多大时才能使得 $P(|\bar{x}-\mu|<1)\geqslant 0.95$ 成立？

解：

由于 $\bar{x}\sim N(\mu,\frac{16}{n})$，根据切比雪夫不等式，

$$P(|\bar{x}-E\bar{x}|<\varepsilon)\geqslant 1-\frac{\operatorname{Var}\bar{x}}{\varepsilon}$$

$$P(|\bar{x}-\mu|<1)\geqslant 1-\frac{16}{n}$$

$$\frac{16}{n}=0.95\Rightarrow n=\frac{16}{0.95}=\frac{320}{19}\approx 16.8421052631579$$

因为 n 为整数，所以 n 至少为 17 时才能使得 $P(|\bar{x}-\mu|<1)\geqslant 0.95$ 成立。 $\square$

4. 由正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 抽取容量为 20 的样本，试求 $P\left(10\sigma^2\leqslant\sum_{i=1}^{20}(x_i-\mu)^2\leqslant 30\sigma^2\right)$。

解：

由于 $s^2 = \dfrac{1}{19}\sum_{i=1}^{20}(x_i-\mu)^2$，$\dfrac{19s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$，所以 $\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{20}(x_i-\mu)^2 \sim \chi^2(n-1)$。所以

$$
\begin{aligned}
&P\left(10\sigma^2 \leqslant \sum_{i=1}^{20}(x_i-\mu)^2 \leqslant 30\sigma^2\right) = P\left(10 \leqslant \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{20}(x_i-\mu)^2 \leqslant 30\right) \\
&= \int_{10}^{30} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{20}{2}}}{\Gamma\left(\frac{20}{2}-1\right)} y^{\frac{20}{2}} e^{-\frac{y}{2}} \mathrm{d}y = \int_{10}^{30} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{9!} y^9 e^{-\frac{y}{2}} \mathrm{d}y \approx 0.898318281994385
\end{aligned}
$$

$$\int_{10}^{30} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{9!} x^9 e^{-\frac{x}{2}} \mathrm{d}x$$

0.898318282

□

6. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是来自 $N(\mu, 1)$ 的样本，试确定最小的常数 c，使得对任意的 $\mu \geqslant 0$，有 $P(|\bar{x}| < c) \leqslant \alpha$。

解：

这题什么意思？当 $\mu = 0$ 时，当 $n \to \infty$ 时 $\bar{x} \to 0$, $P(|\bar{x}| < c) \to 1$，怎么可能 $P(|\bar{x}| < c) \leqslant \alpha$ 呢？ □

8. 设随机变量 $X \sim F(n, m)$，证明 $Z = \dfrac{n}{m}X \Big/ \left(1 + \dfrac{n}{m}X\right)$ 服从贝塔分布，并指出其参数。

证明：

设 $Y = \dfrac{n}{m}X$，则

$$p_Y(y) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} y^{\frac{m}{2}-1}(1+y)^{-\frac{m+n}{2}}$$

$$Z = \frac{Y}{1+Y} = 1 - \frac{1}{1+Y} \Longrightarrow Y = \frac{1}{1-Z} - 1 = \frac{Z}{1-Z}$$

所以

$$
\begin{aligned}
p_Z(z) &= \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}\left(\frac{z}{1-z}\right)^{\frac{m}{2}-1}\left(\frac{1}{1-z}\right)^{-\frac{m+n}{2}} \\
&= \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}\left(\frac{z}{1-z}\right)^{\frac{m}{2}}\left(\frac{1-z}{z}\right)(1-z)^{\frac{m}{2}}(1-z)^{\frac{n}{2}} \\
&= \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})} z^{\frac{m}{2}}(1-z)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{1-z}{z}\right) \\
&= \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})} z^{\frac{m}{2}-1}(1-z)^{\frac{n}{2}+1}
\end{aligned}
$$

所以 Z 服从贝塔分布，其参数为 $\dfrac{m}{2}$ 和 $\dfrac{n}{2}$。 □

9. 设 x_1, x_2 是来自 $N(0,\sigma^2)$ 的样本，试求 $Y = \left(\dfrac{x_1+x_2}{x_1-x_2}\right)^2$ 的分布。

解：

$$Y = \left(\frac{x_1+x_2}{x_1-x_2}\right)^2 = \left(\frac{\frac{x_1}{x_2}+1}{\frac{x_1}{x_2}-1}\right)^2 = \left(1+\frac{2}{\frac{x_1}{x_2}-1}\right)^2$$

其中 $\dfrac{x_1}{x_2}$ 的概率密度函数为

$$\begin{aligned} p_{\frac{x_1}{x_2}}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x|\, p(x,tx)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|\, \phi(x)\phi(tx)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-\sigma^2 x^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-\sigma^2 t^2 x^2}{2}} \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sigma^2\pi}\int_0^{+\infty} x e^{\frac{-\sigma^2 x^2}{2}(1+t^2)}\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi\sigma^4(t^2+1)} \end{aligned}$$

设随机变量 $Z = 1+\frac{2}{\frac{x_1}{x_2}-1}$，则 $\frac{x_1}{x_2} = 1+\frac{2}{Z-1}, Y = Z^2$，所以

$$p_Z(z) = \frac{1}{\pi\sigma^4\left[\left(1+\frac{2}{z-1}\right)^2+1\right]} = \frac{(z-1)^2}{\pi\sigma^4((z-1)^2+(z+1)^2)}$$

$$\begin{aligned} p_Y(y) &= p_Z(\sqrt{y}) + p_Z(-\sqrt{y}) = \frac{(\sqrt{y}-1)^2}{\pi\sigma^4((\sqrt{y}-1)^2+(\sqrt{y}+1)^2)} + \frac{(\sqrt{y}-1)^2}{\pi\sigma^4((\sqrt{y}-1)^2+(\sqrt{y}+1)^2)} \\ &= \frac{-2\sqrt{y}+y+1}{\pi\sigma^4(y+1)} \end{aligned}$$

此即为 Y 的概率密度函数。 □

5.5 充分统计量

1. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是来自几何分布

$$P(X=x) = \theta(1-\theta)^x, \quad x = 0,1,2,\cdots$$

的样本，证明 $T = \sum\limits_{i=1}^n x_i$ 是充分统计量。

证明：

$$p(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta) = \prod_{i=1}^n \theta(1-\theta)^{x_i} = \theta^n(1-\theta)^{\sum_{i=1}^n x_i} = \theta^n(1-\theta)^T$$

取 $g(T,\theta) = \theta^n(1-\theta)^T, h(X) = 1$，由因子分解定理可知 $T = \sum\limits_{i=1}^n x_i$ 是 θ 的充分统计量。 □

3. 设总体为如下离散分布：$\begin{array}{c|cccc} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_k \\ \hline p & p_1 & p_2 & \cdots & p_k \end{array}$。$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是来自该总体的样本，

(1) 证明次序统计量 $(x_{(1)}, x_{(2)}, \cdots, x_{(n)})$ 是充分统计量；

证明：

设 $T = (x_{(1)}, x_{(2)}, \cdots, x_{(n)})$，$X$ 表示一次取样。则

$$\begin{aligned} P(X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)|T = t) &= \frac{P(X = (x_1, x_2, \cdots, x_n), T = t)}{P(T = t)} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^n p_i}{\mathrm{P}_n^n \prod_{i=1}^n p_i} = \frac{1}{\mathrm{P}_n^n} = \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

可见与 T 无关，所以次序统计量 $(x_{(1)}, x_{(2)}, \cdots, x_{(n)})$ 是充分统计量。 □

(2) 以 n_j 表示 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中等于 a_j 的个数，证明 $(n_1, n_2, \cdots, n_k)$ 是充分统计量。

设 $T = (n_1, n_2, \cdots, n_k)$，$X$ 表示一次取样。则

$$\begin{aligned} P(X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)|T = t) &= \frac{P(X = (x_1, x_2, \cdots, x_n), T = t)}{P(T = t)} \\ &= \frac{\prod_{j=1}^n p_j}{\mathrm{P}_n^n \prod_{j=1}^n p_j^{n_j}} \end{aligned}$$

应该与 T 无关，所以 $(n_1, n_2, \cdots, n_k)$ 是充分统计量。

8. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是来自拉普拉斯（Laplace）分布

$$p(x; \theta) = \frac{1}{2\theta} e^{-\frac{|x|}{\theta}}, \theta > 0$$

的样本，试给出一个充分统计量。

解：

设 X 表示一次取样，则

$$P(X = (x_1, x_2, \cdots, x_n); \theta) = \prod_{i=1}^n p(x_i; \theta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{2\theta} e^{-\frac{|x|}{\theta}} = \left(\frac{1}{2\theta}\right)^n e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n |x_i|}$$

令 $T = \sum_{i=1}^n |x_i|$，则上式 $= \left(\frac{1}{2\theta}\right)^n \left(e^{-\frac{T}{\theta}}\right)$。则可以令 $g(T, \theta) = \left(\frac{1}{2\theta}\right)^n \left(e^{-\frac{T}{\theta}}\right)$，$h(X) = 1$，由因子分解定理可知 $T = \sum_{i=1}^n |x_i|$ 是 θ 的充分统计量。 □

10. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是来自正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本。

(1) 在 μ 已知时给出 σ^2 的一个充分统计量。

解：

$$p(x_1, x_2, \cdots, x_n; \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\}$$

所以可以令 $T = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$，则 T 是 σ^2 的一个充分统计量。 □

(2) 在 σ^2 已知时给出 μ 的一个充分统计量。

解：

$$\begin{aligned} p(x_1, x_2, \cdots, x_n; \sigma^2) &= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\} \\ &= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{n\mu^2}{2\sigma^2}\right\} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right\} \exp\left\{\frac{\mu}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}x_i\right\} \end{aligned}$$

令 $T = \sum_{i=1}^{n} x_i$，则 $g(\mu, T) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{n\mu^2}{2\sigma^2}\right\} \exp\left\{\frac{\mu}{\sigma^2}T\right\}, h(\overrightarrow{x}) = \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right\}$。
所以 T 是 μ 的一个充分统计量。

□

11. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是来自均匀分布 $U(\theta_1, \theta_2)$ 的样本，试给出一个充分统计量。

解：

$$p(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta_1, \theta_2) = \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta_2-\theta_1}1_{[\theta_1,\theta_2]}(x_i) = \left(\frac{1}{\theta_2-\theta_1}\right)^n 1_{[\theta_1,\theta_2]}(x_{(1)}, x_{(n)})$$

所以 $(x_{(1)}, x_{(n)})$ 是一个充分统计量。 □

12. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是来自均匀分布 $U(\theta, 2\theta), \theta > 0$ 的样本，试给出充分统计量。

解：

$$p(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}1_{[\theta,2\theta]}(x_i) = \frac{1}{\theta^n}1_{[\theta,2\theta]}(x_{(1)}, x_{(n)})$$

所以 $(x_{(1)}, x_{(n)})$ 是一个充分统计量。 □

17. 设 $\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}, i=1,2,\cdots,n$ 是来自正态分布族

$$\left\{ N\left(\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \right) ;\ -\infty<\theta_1,\theta_2<\infty, \sigma_1,\sigma_2>0, |\rho|\leqslant 1 \right\}$$

的一个二维样本，寻求 $(\theta_1,\sigma_1,\theta_2,\sigma_2,\rho)$ 的充分统计量。

解：

$$p\left(\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}; (\theta_1,\sigma_1,\theta_2,\sigma_2,\rho) \right) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)}(a_i^2+b_i^2-2\rho a_i b_i) \right\}$$
$$= \left(\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \right)^n \exp\left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i=1}^n b_i^2 - 2\rho\sum_{i=1}^n a_i b_i \right) \right\}$$

其中

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i-\theta_1}{\sigma_1} \right)^2 = \frac{1}{\sigma_1^2}\sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2\theta_1 x_i + \theta_1^2) = \frac{1}{\sigma_1^2}\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{2\theta_1}{\sigma_1^2}\sum_{i=1}^n x_i + \frac{\theta_1^2}{\sigma_1^2}$$

$$\sum_{i=1}^n b_i^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i-\theta_2}{\sigma_2} \right)^2 = \frac{1}{\sigma_2^2}\sum_{i=1}^n (y_i^2 - 2\theta_2 y_i + \theta_2^2) = \frac{1}{\sigma_2^2}\sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{2\theta_2}{\sigma_2^2}\sum_{i=1}^n y_i + \frac{\theta_2^2}{\sigma_2^2}$$

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i-\theta_1}{\sigma_1} \right)\left(\frac{y_i-\theta_2}{\sigma_2} \right) = \frac{1}{\sigma_1\sigma_2}\sum_{i=1}^n (x_i y_i - \theta_1 y_i - \theta_2 x_i + \theta_1\theta_2)$$
$$= \frac{1}{\sigma_1\sigma_2}\sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{\theta_1}{\sigma_1\sigma_2}\sum_{i=1}^n y_i - \frac{\theta_2}{\sigma_1\sigma_2}\sum_{i=1}^n x_i + \frac{n\theta_1\theta_2}{\sigma_1\sigma_2}$$

仔细观察即可发现

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i,\ \sum_{i=1}^n x_i^2,\ \sum_{i=1}^n y_i,\ \sum_{i=1}^n y_i^2,\ \sum_{i=1}^n x_i y_i \right)$$

是此二维正态分布的充分统计量。 □

19. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是来自两参数指数分布

$$p(x;\theta,\mu) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}, \quad x>\mu, \theta>0$$

的样本，证明 $(\bar{x}, x_{(1)})$ 是充分统计量。

证明：

$$p(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta,\mu) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x_i-\mu}{\theta}} = \frac{1}{\theta^n}\exp\left\{ -\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu) \right\}$$
$$= \frac{1}{\theta^n}\exp\left\{ -\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n x_i \right\} \exp\left\{ \frac{n\mu}{\theta} \right\}, \quad x_1,x_2,\cdots,x_n>\mu$$

其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n>\mu \iff x_{(1)}>\mu$，并且 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=n\bar{x}$，所以 $(\bar{x},x_{(1)})$ 是充分统计量。 □

20. 设随机变量 $Y_i\sim N(\beta_0+\beta_1x_i,\sigma^2), i=1,2,\cdots,n$，诸 Y_i 独立，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是已知常数，证明 $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}Y_i,\ \sum\limits_{i=1}^{n}x_iY_i,\ \sum\limits_{i=1}^{n}Y_i^2\right)$ 是充分统计量。

解：

$$p(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n;\beta_0,\beta_1,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{Y_i-(\beta_0+\beta_1x)}{\sigma}\right)^2\right\}$$
$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\beta_0-\beta_1x_i)^2\right\}$$

其中

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\beta_0-\beta_1x_i)^2=\sum_{i=1}^{n}Y_i^2+n\beta_0^2+n\beta_1^2\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\beta_0\sum_{i=1}^{n}Y_i-2\beta_1\sum_{i=1}^{n}x_iY_i+\beta_0\beta_1\sum_{i=1}^{n}x_i$$

其中 β_0,β_1,σ 为参数，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 已知，所以 $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}Y_i,\ \sum\limits_{i=1}^{n}x_iY_i,\ \sum\limits_{i=1}^{n}Y_i^2\right)$ 是充分统计量。

□

第六章　参数估计

6.1　点估计的概念与无偏性

3. 设 $\widehat{\theta}$ 是参数 θ 的无偏估计，且有 $\mathrm{Var}(\widehat{\theta}) > 0$，试证 $(\widehat{\theta})^2$ 不是 θ^2 的无偏估计。

证明：

由题意可知 $E\widehat{\theta} = \theta$，$\mathrm{Var}\,\widehat{\theta} = E\widehat{\theta}^2 - (E\widehat{\theta})^2 > 0$，所以 $E\widehat{\theta}^2 > (E\widehat{\theta})^2 = \theta^2$，所以 $\widehat{\theta}^2$ 不是 θ^2 的无偏估计。 □

4. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2), x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是来自该总体的一个样本。试确定常数 c 使 $c\sum\limits_{i=1}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)^2$ 为 σ^2 的无偏估计。

解：

$$
\begin{aligned}
Ec\sum_{i=1}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)^2 &= Ec\sum_{i=1}^{n-1}(x_{i+1}^2 - 2x_ix_{i+1} + x_i^2) \\
&= c\sum_{i=1}^{n-1}Ex_{i+1}^2 - 2c\sum_{i=1}^{n-1}Ex_ix_{i+1} + c\sum_{i=n}^{n-1}Ex_i^2
\end{aligned}
$$

因为总体 $X \sim N(\mu, \sigma)$，所以 $\forall i = 1, 2, \cdots, n$，$Ex_i = \mu, \mathrm{Var}\,x_i = Ex_i^2 - (Ex_i)^2 = \sigma^2$，从而 $Ex_i^2 = \sigma^2 + \mu^2$。由于 x_i 与 x_{i+1} 独立，所以 $Ex_ix_{i+1} = Ex_i \cdot Ex_{i+1} = \mu^2$。所以

$$
\begin{aligned}
\text{上式} &= c\sum_{i=1}^{n-1}(\sigma^2 + \mu^2) - 2c\sum_{i=1}^{n-1}\mu^2 + c\sum_{i=1}^{n-1}(\sigma^2 + \mu^2) \\
&= 2c(n-1)(\sigma^2 + \mu^2) - 2c(n-1)\mu^2 \\
&= 2c(n-1)\sigma^2
\end{aligned}
$$

所以当 $c = \dfrac{1}{2(n-1)}$ 时，$c\sum\limits_{i=1}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)^2$ 为 σ^2 的无偏估计。 □

5. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是来自下列总体的简单样本，

$$p(x,\theta)=\begin{cases}1, & \theta-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\theta+\frac{1}{2}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\qquad -\infty<\theta<\infty$$

证明样本均值 $\bar{x}$ 及 $\frac{1}{2}(x_{(1)}+x_{(n)})$ 都是 θ 的无偏估计，问何者更有效?

证明：

$E\bar{x}=\theta$，$\operatorname{Var}\bar{x}=\frac{1}{n}\times\frac{1}{12}=\frac{1}{12n}$。

而 $E\frac{1}{2}(x_{(1)}+x_{(n)})$ 为样本中最小值和最大值的平均，虽然计算不出，但理论上也应该是 θ。但是似乎不像样本均值一样覆盖了样本全部的信息，所以应该是 $\operatorname{Var}\bar{x}\leqslant\operatorname{Var}\frac{1}{2}(x_{(1)}+x_{(n)})$，即 $\bar{x}$ 更有效。 □

9. 设有 k 台一起，已知用第 i 台仪器测量的标准差为 $\sigma_i(i=1,2,\cdots,k)$。用这些仪器独立地对某一物理量 θ 各观察一次，分别得到 $x_1, x_2, \cdots, x_k$，设仪器都没有系统偏差。问 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 应取何值，方能使 $\widehat{\theta}=\sum\limits_{i=1}^{k}a_ix_i$ 成为 θ 的无偏估计，且方差达到最小?

解：

$$E\widehat{\theta}=E\sum_{i=1}^{k}a_ix_i=\sum_{i=1}^{k}a_iEx_i=\theta\sum_{i=1}^{k}a_i=\theta\Longrightarrow\sum_{i=1}^{k}a_i=1$$

$$\operatorname{Var}\widehat{\theta}=\operatorname{Var}\sum_{i=1}^{k}a_ix_i=\sum_{i=1}^{k}a_i^2\operatorname{Var}x_i=\sum_{i=1}^{k}a_i^2\sigma_i^2$$

所以原问题可以转化为

$$\underset{a_i}{\arg\min}\quad\sum_{i=1}^{k}a_i^2\sigma_i^2\quad,\quad\text{s.t.}\quad\sum_{i=1}^{k}a_i=1$$

对此可以使用拉格朗日乘数法。令

$$f(a_1,\cdots,a_n,\lambda)=\sum_{i=1}^{k}a_i^2\sigma_i^2+\lambda\left(\sum_{i=1}^{k}a_i-1\right)$$

则

$$\begin{cases}\forall i=1,2,\cdots,k, & f'_{a_i}=2a_i\sigma_i^2+\lambda=0\\ f'_\lambda=\sum_{i=1}^{k}a_i-1=0\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}\forall i=1,2,\cdots,k, & a_i=\dfrac{\frac{1}{2\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2\sigma_i^2}}\\ \lambda=-\dfrac{1}{\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2\sigma_i^2}}\end{cases}$$

所以 $\forall i=1,2,\cdots,k,\quad a_i=\frac{\frac{1}{2\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2\sigma_i^2}}$，方能使 $\widehat{\theta}=\sum\limits_{i=1}^{k}a_ix_i$ 成为 θ 的无偏估计，且方差达到最小。 □

11. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为来自总体 X 的样本，为了得到标准差 σ 的估计量，考虑统计量：

$$y_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i-\bar{x}|,\quad \bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,\quad n\geqslant 2$$

$$y_2=\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i-x_j|,\quad n\geqslant 2$$

求常数 C_1 与 C_2，使得 C_1y_1 与 C_2y_2 都是 σ 的无偏估计。

解：

由于 $\forall i,j=1,2,\cdots,n(i\neq j),\quad x_i\sim N(\mu,\sigma^2),x_j\sim N(\mu,\sigma^2),\bar{x}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$ 且它们应该相互独立。所以

$$x_i-\bar{x}\sim N(0,\sigma^2+\frac{\sigma^2}{n}),\quad x_i-x_j\sim N(0,2\sigma^2)$$

因为 $Y\sim N(0,\sigma^2)$ 时 $E|Y|=\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}$，所以

$$E|x_i-\bar{x}|=\sqrt{\sigma^2+\frac{\sigma^2}{n}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}=\sigma\sqrt{1+\frac{1}{n}}\sqrt{\frac{2}{\pi}},\quad E|x_i-x_j|=\sqrt{2}\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}=\frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}$$

所以

$$EC_1y_1=C_1\frac{1}{n}\times n\cdot\sigma\sqrt{1+\frac{1}{n}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}=\sigma\Longrightarrow C_1=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}}=\sqrt{\frac{n\pi}{2n+2}}$$

$$EC_2y_2=C_2\frac{1}{n(n-1)}(n^2-n)\cdot\frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}=\sigma\Longrightarrow C_2=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

所以

$$C_1=\sqrt{\frac{n\pi}{2n+2}},\quad C_2=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

□

6.2 矩估计及相合性

3. 设总体分布列如下，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是样本，试求未知参数的矩估计：

(1) $P(X=k)=\frac{1}{N},k=0,1,2,\cdots,N-1$，$N$（正整数）是未知参数；

解：

$$EX=\sum_{k=0}^{N-1}k\cdot\frac{1}{N}=\frac{1}{N}\cdot\frac{N(N-1)}{2}=\frac{N-1}{2}$$

所以 $N=2EX+1$，所以 N 的矩估计为

$$\widehat{N}=2\bar{x}+1$$

□

(2) $P(X=k)=(k-1)\theta^2(1-\theta)^{k-2},\quad k=2,3,\cdots,\quad 0<\theta<1$。

解：

$EX=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)\theta^2(1-\theta)^{k-2}=\frac{2}{\theta}$，所以 $\theta=\frac{2}{EX}$，所以 θ 的矩估计为 $\widehat{\theta}=\frac{2}{\bar{x}}$。

□

4. 设总体密度函数如下，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是样本，试求未知参数的矩估计：

(1) $p(x;\theta)=\frac{2}{\theta^2}(\theta-x),\quad 0<x<\theta,\quad \theta>0$;

解：

$EX=\int_0^{\theta}x\frac{2}{\theta^2}(\theta-x)\mathrm{d}x=\frac{\theta}{3}$，所以 $\theta=3EX$，所以 θ 的矩估计是 $\widehat{\theta}=3\bar{x}$。 □

(2) $p(x;\theta)=(\theta+1)x^{\theta},\quad 0<x<1,\quad \theta>0$;

解：

$EX=\int_0^1 x(\theta+1)x^{\theta}\mathrm{d}x=\frac{\theta+1}{\theta+2}$，所以 θ 的矩估计是 $\widehat{\theta}=\frac{1}{1-\bar{x}}-2$。 □

(3) $p(x;\theta)=\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1},\quad 0<x<1,\quad ,\theta>0$;

解：

$EX=\int_0^1 x\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}$，所以 θ 的矩估计是 $\widehat{\theta}=\left(\frac{\bar{x}}{1-\bar{x}}\right)^2$。 □

(4) $p(x;\theta,\mu)=\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x-\mu}{\theta}},\quad x>\mu,\quad \theta>0$。

解：

$$EX=\int_{\mu}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}\mathrm{d}x=\theta+\mu$$

$$EX^2=\int_{\mu}^{+\infty}x^2\cdot\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}\mathrm{d}x=2\theta^2+2\mu\theta+\mu^2$$

$$\operatorname{Var}X=EX^2-(EX)^2=2\theta^2+2\mu\theta+\mu^2-(\theta+\mu)^2=\theta^2$$

所以 θ 和 μ 的矩估计是

$$\widehat{\theta}=s,\quad \widehat{\mu}=\bar{x}-s$$

□

5. 设总体为 $N(\mu,1)$，现对该总体观测 n 次，发现有 k 次观测值为正，使用频率替换方法求 μ 的估计。

解：

设总体为 X，则根据频率替换方法，$P(X>0)=\dfrac{k}{n}$。设标准正态分布的累积分布函数为 $\Phi(x)$，则

$$\frac{k}{n}=P(X>0)=P\left(\frac{x-\mu}{1}>\frac{0-\mu}{1}\right)=1-P\left(\frac{x-\mu}{1}\leqslant-\mu\right)=1-\Phi(-\mu)$$

所以 μ 的估计为

$$\widehat{\mu}=-\Phi^{-1}(1-\frac{k}{n})$$

□

7. 设总体 X 服从二项分布 $b(m,p)$，其中 m,p 为未知参数，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为 X 的一个样本，求 m 与 p 的矩估计。

解：

因为 $EX=mp$, $\operatorname{Var}X=mp(1-p)$ ，所以 $p=1-\dfrac{\operatorname{Var}X}{EX}$，$m=\dfrac{EX}{p}=\dfrac{(EX)^2}{EX-\operatorname{Var}X}$，所以 m 与 p 的矩估计为

$$m=1-\frac{s}{\bar{x}},\qquad p=\frac{\bar{x}^2}{\bar{x}-s}$$

□

6.3 最大似然估计与 EM 算法

2. 设总体概率函数如下，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是样本，试求未知参数的最大似然估计。

(1) $p(x;\theta)=c\theta^c x^{-(c+1)},x>\theta,\theta>0,c>0$ 已知；

解：

对数似然函数

$$\begin{aligned}\ln L(\theta) &= \ln\prod_{i=1}^{n} p(x_i|\theta) = \ln\prod_{i=1}^{n} c\theta^c x_i^{-(c+1)} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\ln(c\theta^c x_i^{-(c+1)}) = \sum_{i=1}^{n}(\ln c + c\ln\theta - (c+1)\ln x_i) \\ &= n\ln c + nc\ln\theta - (c+1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\end{aligned}$$

只需要让 θ 尽量大即可使似然函数取到最大值，又因为 $\theta < x$，所以 θ 的最大似然估计为 $\widehat{\theta} = x_{(1)}$。 □

(2) $p(x;\theta,\mu) = \frac{1}{\theta}e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}, x > \mu, \theta > 0$;

解：

对数似然函数

$$\begin{aligned}\ln L(\theta,\mu) &= \ln\prod_{i=1}^{n} p(x;\theta,\mu) = \ln\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x-\mu}{\theta}} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}\right) = \sum_{i=1}^{n}(-\ln\theta - \frac{x-\mu}{\theta}) \\ &= -n\ln\theta - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i + \frac{n\mu}{\theta}\end{aligned}$$

对于 μ，由于 $\ln L(\theta,\mu)$ 关于 μ 是线性关系，所以只需要 μ 尽量大即可使似然函数取到最大值，而 $\mu < x$，所以 $\widehat{\mu} = x_{(1)}$。

对于 θ，则需要求偏导，令

$$\frac{\partial \ln L(\theta,\mu)}{\partial\theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}x_i - \frac{n\mu}{\theta^2} = 0$$

则可解得 $\theta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i - \mu = \bar{x} - \mu$。此时 $\ln L(\theta,\mu)$ 关于 θ 最大。

所以 $\widehat{\mu} = x_{(1)}$, $\widehat{\theta} = \bar{x} - x_{(1)}$。 □

(3) $p(x;\theta) = (k\theta)^{-1}, \theta < x < (k+1)\theta, \theta > 0, k > 0$ 已知。

解：

对数似然函数

$$\ln L(\theta) = \ln\prod_{i=1}^{n}(k\theta)^{-1} = \sum_{i=1}^{n}\ln(k\theta)^{-1} = \sum_{i=1}^{n}(-k\theta) = -nk\theta$$

只要 θ 尽量小即可使似然函数取得最大值。由于 $\theta < x < (k+1)\theta$ 且 $k > 0$，所以 $\frac{\theta}{k+1} < \frac{x}{k+1} < \theta$，所以 θ 的最大似然估计为 $\widehat{\theta} = \dfrac{x_{(n)}}{k+1}$。 □

4. 一地质学家为研究密歇根湖的湖滩地区的岩石成分，随机地自该地区取 100 个样品，每个样品有 10 块石子，记录了每个样品中属石灰石的石子数。假设这 100 次观察相互独立，求这地区石子中石灰石的比例 p 的最大似然估计。该地质学家所得的数据如下:

样本中的石子数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
样品个数	0	1	6	7	23	26	21	12	3	1	0

解：

当已知石灰石的比例为 p 时，并且如果每次抽样都是随机抽样，那么每个石子是石灰石的概率就是 p，由于每个样品有 10 块石子，所以一次抽样服从二项分布 $b(10,p)$，则概率函数为

$$p(k;p)=\mathrm{C}_{10}^{k}p^{k}(1-p)^{10-k}$$

设表格中的第一行为 $x_i(i=0,1,\cdots,10)$，第二行为 $a_i(i=0,1,\cdots,10)$，则对数似然函数为

$$\begin{aligned}\ln L(p)&=\ln\prod_{i=1}^{n}\left(\mathrm{C}_{10}^{x_i}p^{x_i}(1-p)^{10-x_i}\right)^{a_i}\\&=\sum_{i=1}^{n}a_i\left(\ln\mathrm{C}_{10}^{x_i}+x_i\ln p+(10-x_i)\ln(1-p)\right)\\&=\sum_{i=1}^{n}a_i\ln\mathrm{C}_{10}^{x_i}+\ln p\sum_{i=1}^{n}a_ix_i+\ln(1-p)\sum_{i=1}^{n}a_i(10-x_i)\end{aligned}$$

令

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(p)}{\mathrm{d}p}=\frac{\sum_{i=1}^{n}a_ix_i}{p}-\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i(10-x_i)}{1-p}=0$$

解得

$$p=\frac{\sum_{i=1}^{n}a_ix_i}{10\sum_{i=1}^{n}a_i}=\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{x_i}{10}}{\sum_{i=1}^{n}a_i}$$

即以样品个数为权重，样品中石灰石比例的加权平均值。

所以

$$\widehat{p}=\frac{\sum_{i=1}^{n}a_ix_i}{10\sum_{i=1}^{n}a_i}=\frac{\begin{array}{r}0\times0+1\times1+6\times2+7\times3+23\times4+26\times5\\+21\times6+12\times7+3\times8+1\times9+0\times10\end{array}}{10\times100}=0.499$$

□

5. 在遗传学研究中经常要从截尾二项分布中抽样，其总体概率函数为

$$p(X=k;p)=\frac{\binom{m}{k}p^{k}(1-p)^{m-k}}{1-(1-p)^{m}},\quad k=1,2,\cdots,m$$

若已知 $m=2,x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是样本，试求 p 的最大似然估计。

解：

对数似然函数为

$$
\begin{aligned}
\ln L(p) &= \ln \prod_{i=1}^{n} \frac{\binom{m}{x_i} p^{x_i}(1-p)^{m-x_i}}{1-(1-p)^m} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[\ln \binom{m}{x_i} + x_i \ln p + (m-x_i)\ln(1-p) - \ln(1-(1-p)^m) \right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \ln \binom{m}{x_i} + \ln p \sum_{i=1}^{n} x_i + \ln(1-p) \sum_{i=1}^{n}(m-x_i) - n\ln(1-(1-p)^m)
\end{aligned}
$$

令

$$
\frac{\mathrm{d} \ln L(p)}{\mathrm{d} p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{p} - \frac{\sum_{i=1}^{n}(m-x_i)}{1-p} - n\frac{-m(1-p)^{m-1}}{1-(1-p)^m} = 0
$$

由于 $m=2$，所以

$$
\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{p} - \frac{\sum_{i=1}^{n}(2-x_i)}{1-p} + \frac{2n(1-p)}{1-(1-p)^2} = 0
$$

即

$$
\frac{n\bar{x}}{p} - \frac{2-n\bar{x}}{1-p} + \frac{2n(1-p)}{1-(1-p)^2} = 0
$$

解得 p 的最大似然估计为

$$
\widehat{p} = \frac{\bar{x}n+4n+4}{4(n+1)} \pm \frac{\sqrt{\bar{x}^2n^2-8\bar{x}n^2-8\bar{x}n+16n+16}}{4(n+1)}
$$

□

6. 已知在文学家萧伯纳的”The Intelligent Woman’s Guide to Socialism and Capitalism” 一书中，一个句子的单词数 X 近似地服从对数正态分布，即 $Z=\ln X \sim N(\mu,\sigma^2)$。今从该书中随机地取 20 个句子，这些句子中的单词数分别为

52 24 15 67 15 22 63 26 16 32 7 33 28 14 7 29 10 6 59 30

求该书中一个句子单词数均值 $E(X)=e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$ 的最大似然估计。

解：

□

根据题意，由于 $Z=\ln X \sim N(\mu,\sigma^2)$，可以将一个句子的单词数先取自然对数，此时即可使用正态分布的最大似然估计来估计 μ 和 σ^2。

```python
import numpy as np

a = np.array([52,24,15,67,15,22,63,26,16,32,7,33,28,14,7,29,10,6,59,30])
print(np.log(a))
# [3.95124372 3.17805383 2.7080502  4.20469262 2.7080502  3.09104245
#  4.14313473 3.25809654 2.77258872 3.4657359  1.94591015 3.49650756
```

```
#  3.33220451 2.63905733 1.94591015 3.36729583 2.30258509 1.79175947
#  4.07753744 3.40119738]

print(np.mean(np.log(a)))
# 3.0890326915239807
print(np.var(np.log(a)))
# 0.5081312851436304
```

所以 $\widehat{\mu} \approx 3.0890326915239807$, $\widehat{(\sigma^2)} \approx 0.5081312851436304$。

再根据最大似然估计的不变性，直接计算 $e^{\widehat{\mu}+\frac{\widehat{(\sigma^2)}}{2}}$。

```
np.exp(np.mean(np.log(a)) + np.var(np.log(a)) / 2)
# 28.306694575039742
```

则该书中一个句子单词数均值 $E(X) = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$ 的最大似然估计约为 28.306694575039742。

7. 设总体 $X \sim U(\theta, 2\theta)$，其中 $\theta > 0$ 是未知参数，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为取自该总体的样本，$\bar{x}$ 为样本均值。

(1) 证明 $\widehat{\theta} = \dfrac{2}{3}\bar{x}$ 是参数 θ 的无偏估计和相合估计；

证明：

$$E\widehat{\theta} = E\frac{2}{3}\bar{x} = E\frac{2}{3}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{2}{3}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX = \frac{2}{3}\frac{1}{n}n\frac{\theta+2\theta}{2} = \theta$$

$$\operatorname{Var}\widehat{\theta} = \operatorname{Var}\frac{2}{3}\bar{x} = \frac{2}{3}\frac{n\operatorname{Var}X}{n^2} = \frac{2\operatorname{Var}X}{3n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

所以 $\widehat{\theta} = \dfrac{2}{3}\bar{x}$ 是参数 θ 的无偏估计和相合估计。 □

(2) 求 θ 的最大似然估计，它是无偏估计吗？是相合估计吗？

解：

$$\ln L(\theta) = \ln\prod_{i=1}^{n} 1_{[\theta,2\theta]}(x_i)\cdot\frac{1}{\theta} = \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}\ln 1_{[\theta,2\theta]}(x_i)$$

要使似然函数最大，则需要 θ 尽量小，同时要满足 $\theta \leqslant x_i \leqslant 2\theta$，即 $\frac{\theta}{2} \leqslant \frac{x_i}{2} \leqslant \theta$，所以 θ 的最大似然估计为 $\widehat{\theta} = \dfrac{x_{(n)}}{2}$。

下面验证无偏性。

$$E\widehat{\theta} = \frac{1}{2}\int_{\theta}^{2\theta} x\frac{n}{\theta}\left(\frac{x-\theta}{\theta}\right)^{n-1}\mathrm{d}x = \frac{\theta(2n+1)}{2(n+1)} \xrightarrow{n\to\infty} \theta$$

所以 $\widehat{\theta}$ 不是无偏估计，但是是渐近无偏估计。

下面验证相合性。

$$E\widehat{\theta}^2 = \frac{1}{4}\int_{\theta}^{2\theta} x^2\frac{n}{\theta}\left(\frac{x-\theta}{\theta}\right)^{n-1}\mathrm{d}x = \frac{\theta^2(n^2+2n+\frac{1}{2})}{n^2+3n+2}$$

$$\mathrm{Var}\,\widehat{\theta} = E\widehat{\theta}^2 - (E\widehat{\theta})^2 = \frac{n\theta^2}{4(n^3+4n^2+5n+2)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

所以 $\widehat{\theta}$ 是相合估计。 □

8. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是来自密度函数为 $p(x;\theta) = e^{-(x-\theta)}, x > \theta$ 的总体的样本。

(1) 求 θ 的最大似然估计 $\widehat{\theta}_1$，它是否是相合估计？是否是无偏估计？

解：

$$\ln L(\theta) = \ln\prod_{i=1}^{n} e^{-(x-\theta)} = \sum_{i=1}^{n}(-(x_i-\theta)) = -\sum_{i=1}^{n}x_i + n\theta$$

要让似然函数最大，θ 要尽量大，同时 $\theta < x$，所以 θ 的最大似然估计为 $\widehat{\theta} = x_{(1)}$。

$\widehat{\theta} = x_{(1)}$ 的概率函数为

$$p(x) = n\left[1 - \int_{\theta}^{x} e^{-(t-\theta)}\mathrm{d}t\right]^{n-1} e^{-(x-\theta)} = n(e^{\theta-x})^n$$

则可以验证无偏性

$$E\widehat{\theta}_1 = \int_{\theta}^{+\infty} xn(e^{\theta-x})^n\mathrm{d}x = \frac{1}{n} + \theta \xrightarrow{n\to\infty} \theta$$

所以 $\widehat{\theta}_1$ 不是无偏估计，但是是渐近无偏估计。

下面验证相合性。

$$E\widehat{\theta}_1^2 = \int_{\theta}^{+\infty} x^2 n(e^{\theta-x})^n\mathrm{d}x = \frac{2}{n^2} + \frac{2}{n}\theta + \theta^2$$

$$\mathrm{Var}\,\widehat{\theta}_1 = E\widehat{\theta}_1^2 - (E\widehat{\theta})^2 = \frac{2}{n^2} + \frac{2}{n}\theta + \theta^2 - \left(\frac{1}{n}+\theta\right)^2 = \frac{1}{n^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

所以 $\widehat{\theta}_1$ 是相合估计。 □

(2) 求 θ 的矩估计 $\widehat{\theta}_2$，它是否是相合估计？是否是无偏估计？

解：

$$EX = \int_{\theta}^{+\infty} xe^{-(x-\theta)}\mathrm{d}x = \theta + 1$$

所以 $\widehat{\theta}_2 = 1 - \bar{x}$。

$$E\widehat{\theta}_2 = E(1-\bar{x}) = 1 - EX = \theta$$

所以 $\widehat{\theta}_2$ 是无偏估计。

$$\operatorname{Var}\widehat{\theta}_2=\operatorname{Var}(1-\bar{x})=\frac{\operatorname{Var}X}{n}\xrightarrow{n\to\infty}0$$

所以 $\widehat{\theta}_2$ 是相合估计。 □

10. 证明：对正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，若只有一个观测值，则 μ,σ^2 的最大似然估计不存在。

证明：

设此观测值为 x，则似然函数为

$$L(\mu,\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

要使似然函数最大，则 $\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2$ 应尽量小，则 $\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\to 0$，所以 $\mu=x,\sigma^2=\infty$，由于 $\infty\notin\mathbb{R}$，所以 μ,σ^2 的最大似然估计不存在。 □

6.4 最小方差无偏估计

1. 设总体概率函数是 $p(x;\theta),x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是其样本，$T=T(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 θ 的充分统计量，则对 $g(\theta)$ 的任一估计 $\hat{g}$，令 $\tilde{g}=E(\hat{g}|T)$，证明：$MSE(\tilde{g})\leqslant MSE(\hat{g})$。这说明，在均方误差准则下，人们只需要考虑基于充分统计量的估计。

证明：

$$\begin{aligned}\operatorname{MSE}(\hat{g})&=E((\hat{g}-g(\theta))^2)=E\left((\hat{g}-\tilde{g}+\tilde{g}-g(\theta))^2\right)\\&=E(\hat{g}-\tilde{g})^2+2E(\hat{g}-\tilde{g})(\tilde{g}-g(\theta))+E(\tilde{g}-g(\theta))^2\\&=E(\hat{g}-\tilde{g})^2+2E(\hat{g}-\tilde{g})(\tilde{g}-g(\theta))+\operatorname{MSE}(\tilde{g})\end{aligned}$$

其中

$$E(\hat{g}-\tilde{g})(\tilde{g}-g(\theta))=E(E((\hat{g}-\tilde{g})(\tilde{g}-g(\theta))|T))$$

由于 T 是充分统计量，所以 $E(\tilde{g}-g(\theta))$ 与 T 无关，所以

$$\begin{aligned}E(\hat{g}-\tilde{g})(\tilde{g}-g(\theta))&=E(\tilde{g}-g(\theta))E(E(\hat{g}-\tilde{g}|T))\\&=[E(\tilde{g})-E(g(\theta))]E(E(\hat{g}-\tilde{g}|T))=0\end{aligned}$$

所以

$$\operatorname{MSE}(\hat{g})=E(\hat{g}-\tilde{g})^2+\operatorname{MSE}(\tilde{g})\geqslant\operatorname{MSE}(\tilde{g})$$

□

3. 设 T 是 $g(\theta)$ 的 UMVUE，$\hat{g}$ 是 $g(\theta)$ 的无偏估计，证明：若 $\operatorname{Var}(\hat{g})<\infty$，则 $\operatorname{Cov}(T,\hat{g})\geqslant 0$。

证明：

由于 T 是 $g(\theta)$ 的 UMVUE，所以 $E(T)=g(\theta),\mathrm{Var}(T)<\infty$；由于 $\hat{g}$ 是 $g(\theta)$ 的无偏估计，所以 $E(\hat{g})=0$。从而 $E(T-\hat{g})=E(T)-E(\hat{g})=0$，且 $\mathrm{Var}(T-\hat{g})=\mathrm{Var}(T)+\mathrm{Var}(\hat{g})+\mathrm{Cov}(T,\hat{g})<\infty$（应该不存在方差有限但协方差无限的情况吧），所以根据判断准则，

$$0=\mathrm{Cov}(T,T-\hat{g})=\mathrm{Var}(T)-\mathrm{Cov}(T,\hat{g})$$

所以 $\mathrm{Cov}(T,\hat{g})=\mathrm{Var}(T)>0$。 □

5. 设总体 $p(x;\theta)$ 的费希尔信息量存在，若二阶导数 $\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}p(x;\theta)$ 对一切的 $\theta\in\Theta$ 存在，证明费希尔信息量

$$I(\theta)=-E\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln p(x;\theta)\right)$$

证明：

$$\begin{aligned}
-E\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln p(x;\theta)\right)&=-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2\ln p(x;\theta)}{\partial\theta^2}p(x;\theta)\mathrm{d}x\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial\ln p(x;\theta)}{\partial\theta}\right)^2p(x;\theta)\mathrm{d}x\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\ln p(x;\theta)}{\partial\theta}\frac{\partial\ln p(x;\theta)}{\partial p(x;\theta)}\frac{\partial p(x;\theta)}{\partial\theta}p(x;\theta)\mathrm{d}x\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\ln p(x;\theta)}{\partial\theta}\frac{1}{p(x;\theta)}\frac{\partial p(x;\theta)}{\partial\theta}p(x;\theta)\mathrm{d}x\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\ln p(x;\theta)}{\partial\theta}\frac{\partial p(x;\theta)}{\partial\theta}\mathrm{d}x\\
&=E_x\left(\frac{\partial\ln p(x;\theta)}{\partial\theta}\right)^2=I(\theta)
\end{aligned}$$

□

6. 设总体密度函数为 $p(x;\theta)=\theta x^{\theta-1},0<x<1,\theta>0$, $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是样本。

(1) 求 $g(\theta)=\dfrac{1}{\theta}$ 的最大似然估计；

解：

对数似然函数为

$$\ln L(\theta)=\sum_{i=1}^n\ln\theta x^{\theta-1}=\sum_{i=1}^n(\ln\theta+(\theta-1)\ln x_i)=n\ln\theta+(\theta-1)\sum_{i=1}^n\ln x_i$$

对 θ 求导并令其为 0，

$$\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta}=\frac{n}{\theta}+\sum_{i=1}^n x_i=0$$

则 θ 的最大似然估计为 $\hat{\theta}=\dfrac{n}{\sum_{i=1}^n x_i}$，根据最大似然估计的不变性，$g(\theta)=\dfrac{1}{\theta}$ 的最大似然估计为

$$\widehat{g(\theta)}=\frac{1}{\hat{\theta}}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$$

□

(2) 求 $g(\theta)$ 的有效估计。

解：

可以猜测上一小题中的 $\widehat{g(\theta)}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$ 为有效估计，接下来验证一下。

可以计算得到总体的方差为 $\dfrac{1}{\theta^2}$，因此 $g(\hat{\theta})=\bar{x}$ 的方差为 $\dfrac{1}{n\theta^2}$。

由于 $\ln p(x;\theta)=\ln\theta+(\theta-1)\ln x$,

$$\frac{\partial\ln p(x;\theta)}{\partial\theta}=\frac{1}{\theta}+\ln x,\quad \frac{\partial^2\ln p(x;\theta)}{\partial\theta^2}=-\frac{1}{\theta^2},\quad I(\theta)=-E\left(\frac{\partial^2\ln p(x;\theta)}{\partial\theta^2}\right)=\frac{1}{\theta^2}$$

所以 $I(\frac{1}{\theta})=\theta^2$，所以

$$\operatorname{Var}(\widehat{g(\theta)})=\frac{1}{n\theta^2}=\frac{1}{I(\frac{1}{\theta})}=\frac{1}{I(g(\theta))}$$

因此 $\widehat{g(\theta)}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$ 为 $g(\theta)$ 的有效估计。 □

7. 设总体密度函数为 $p(x;\theta)=\dfrac{2\theta}{x^3}e^{-\frac{\theta}{x^2}},x>0,\theta>0$，求 θ 的费希尔信息量 $I(\theta)$。

解：

$$\ln p(x;\theta)=\ln 2+\ln\theta-3\ln x-\frac{\theta}{x^2}$$

$$\frac{\partial\ln p(x;\theta)}{\partial\theta}=\frac{1}{\theta}-\frac{1}{x^2},\quad \frac{\partial^2\ln p(x;\theta)}{\partial\theta^2}=-\frac{1}{\theta^2}$$

所以

$$I(\theta)=-E\left(\frac{\partial^2\ln p(x;\theta)}{\partial\theta^2}\right)=\frac{1}{\theta^2}$$

□

10. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是来自 $\mathrm{Ga}(\alpha,\lambda)$ 的样本，$\alpha>0$ 已知，试证明 $\dfrac{\bar{x}}{\alpha}$ 是 $g(\lambda)=\dfrac{1}{\lambda}$ 的有效估计，从而也是 UMVUE。

证明：

$$p(x;\lambda)=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x},x>0;\quad \ln p(x;\lambda)=\alpha\ln\lambda-\ln\Gamma(\alpha)+(\alpha-1)\ln x-\lambda x$$

$$\frac{\partial \ln p(x;\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{\alpha}{\lambda} - x; \quad \frac{\partial^2 \ln p(x;\lambda)}{\partial \lambda^2} = -\frac{\alpha}{\lambda^2}$$

所以

$$I(\lambda) = -E\left(\frac{\partial^2 \ln p(x;\lambda)}{\partial \lambda^2}\right) = \frac{\alpha}{\lambda^2}; \quad \text{C-R 下界} = \frac{(g'(\lambda))^2}{nI(\lambda)} = \frac{(-\frac{1}{\lambda^2})^2}{n\frac{\alpha}{\lambda^2}} = \frac{1}{\alpha\lambda^2 n}$$

由于总体的方差为 $\frac{\alpha}{\lambda^2}$，所以 $\bar{x}$ 的方差为 $\frac{\alpha}{n\lambda^2}$，所以 $\frac{\bar{x}}{\alpha}$ 的方差为 $\frac{1}{n\alpha\lambda^2}$，等于 C-R 下界。 □

11. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_m \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(a, \sigma^2), y_1, y_2, \cdots y_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(a, 2\sigma^2)$，求 a 和 σ^2 的 UMVUE。

解：

根据贝叶斯估计的方法，$\widehat{a}$ 和 $\widehat{\sigma^2}$ 应为两个信息源的加权平均，权重为方差的倒数，即

$$\widehat{a} = \frac{\frac{1}{m\sigma^2}}{\frac{1}{m\sigma^2} + \frac{1}{2n\sigma^2}}\bar{x} + \frac{\frac{1}{2n\sigma^2}}{\frac{1}{m\sigma^2} + \frac{1}{2n\sigma^2}}\bar{y} = \frac{2\bar{x}n + \bar{y}m}{m + 2n}$$

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{\frac{1}{m\sigma^2}}{\frac{1}{m\sigma^2} + \frac{1}{2n\sigma^2}}s_x^2 + \frac{\frac{1}{2n\sigma^2}}{\frac{1}{m\sigma^2} + \frac{1}{2n\sigma^2}}s_y^2 = \frac{ms_y^2 + 2ns_x^2}{m + 2n}$$

对 0 的任一无偏估计 $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_m, y_1, y_2, \cdots, y_n)$，$\text{Cov}(\widehat{a}, \varphi) = 0, \text{Cov}(\widehat{\sigma^2}, \varphi) = 0$，所以 $\widehat{a}$ 和 $\widehat{\sigma^2}$ 是 UMVUE。 □

12. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(\mu, 1)$，求 μ^2 的 UMVUE。证明此 UMVUE，达不到 C-R 不等式的下界，即它不是有效估计。

证明：

直观上来看，μ^2 的 UMVUE 应该是 $\bar{x}^2$。接下来计算 C-R 不等式的下界，由于 $I(\mu) = 1$，所以 C-R 不等式的下界为

$$\frac{[g'(\mu)]^2}{nI(\mu)} = \frac{(2\mu)^2}{n} = \frac{4\mu^2}{n}$$

由于 $\bar{x} \sim N(\mu, \frac{1}{n})$，所以 $(n(\bar{x} - \mu)) \sim \chi^2(1)$

$$\text{Var}\,\bar{x}^2 = E\bar{x}^4 - (E\bar{x}^2)^2 = \text{实在是不会算了} > \frac{4\mu^2}{n}$$

所以此 UMVUE 达不到 C-R 不等式的下界，即它不是有效估计。 □

14. 设 $x_1, x_2, \cdots x_n$ 为独立同分布变量，$0 < \theta < 1$，

$$P(x_1 = -1) = \frac{1-\theta}{2}, \quad P(x_1 = 0) = \frac{1}{2}, \quad P(x_1 = 1) = \frac{\theta}{2}$$

(1) 求 θ 的 MLE $\widehat{\theta}_1$ 并问 $\widehat{\theta}_1$ 是否是无偏的;

解：

设在 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中有 n_{-1} 个 -1，n_0 个 0，n_1 个 1，则对数极大似然函数为

$$\begin{aligned}\ln L(n_{-1}, n_0, n_1; \theta) &= \ln\left[\left(\frac{1-\theta}{2}\right)^{n_{-1}}\left(\frac{1}{2}\right)^{n_0}\left(\frac{\theta}{2}\right)^{n_1}\right]\\ &= n_{-1}\ln\left(\frac{1-\theta}{2}\right) + n_0\ln\frac{1}{2} + n_1\ln\frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

对 θ 求偏导并令其为 0

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{1}{2}\frac{2n_{-1}}{1-\theta} + \frac{1}{2}\frac{2n_1}{\theta} = \frac{n_1}{\theta} - \frac{n_{-1}}{1-\theta} = 0$$

则最大似然估计为

$$\widehat{\theta}_1 = \frac{n_1}{n_1 + n_{-1}}$$

根据重期望公式，

$$E\widehat{\theta}_1 = E\left(E\left(\frac{n_1}{n_1+n_{-1}}\middle| n_1 + n_{-1}\right)\right)$$

其中

$$E\left(\frac{n_1}{n_1+n_{-1}}\middle| n_1 + n_{-1}\right) = E\left(\frac{n_1}{m}\middle| n_1 + n_{-1} = m\right) = \frac{1}{m} \times m\frac{\frac{\theta}{2}}{\frac{1-\theta}{2} + \frac{\theta}{2}} = \theta$$

所以 $E\widehat{\theta}_1 = E(\theta) = \theta$，即 $\widehat{\theta}_1$ 是无偏估计。 □

(2) 求 θ 的矩估计 $\widehat{\theta}_2$;

解：

设总体为 X，则

$$EX = -1 \times \frac{1-\theta}{2} + 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{\theta}{2} = \theta - \frac{1}{2}$$

所以矩估计 $\widehat{\theta}_2 = \bar{x} + \frac{1}{2}$。 □

(3) 计算 θ 的无偏估计的方差的 C-R 下界。

解：

$$p(x;\theta) = \begin{cases} \frac{1-\theta}{2}, & x = -1 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ \frac{\theta}{2}, & x = 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \quad \ln p(x;\theta) = \begin{cases} \ln(1-\theta) - \ln 2, & x = -1 \\ -\ln 2, & x = 0 \\ \ln\theta - \ln 2, & x = 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases},$$

$$\frac{\partial \ln p(x;\theta)}{\partial \theta}=\begin{cases}-\frac{1}{1-\theta}, & x=-1\\ 0, & x=0\\ \frac{1}{\theta}, & x=1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}, \quad \left(\frac{\partial \ln p(x;\theta)}{\partial \theta}\right)^2=\begin{cases}\frac{1}{(1-\theta)^2}, & x=-1\\ \frac{1}{\theta^2}, & x=1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

所以

$$I(\theta)=E\left(\frac{\partial \ln p(x;\theta)}{\partial \theta}\right)^2=\frac{1}{(1-\theta)^2}\times\frac{1-\theta}{2}+\frac{1}{\theta^2}\times\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2\theta(1-\theta)}$$

所以 θ 的无偏估计的方差的 C-R 下界为

$$\frac{1}{nI(\theta)}=\frac{2\theta(1-\theta)}{n}$$

□

6.5 贝叶斯估计

2. 设总体为均匀分布 $U(\theta,\theta+1)$，θ 的先验分布是 $U(10,16)$。现有三个观测值：11.7, 12.1, 12.0。求 θ 的后验分布。

解：

$$p(X|\theta)=\begin{cases}1^3, & \theta\in[11.1,11.7]\\ 0, & \theta\notin[11.1,11.7]\end{cases}=1_{[11.1,11.7]}(\theta), \quad \pi(\theta)=\frac{1}{6}1_{[10,16]}(\theta)$$

所以 $h(X,\theta)=p(X|\theta)\pi(\theta)=\frac{1}{6}1_{[11.1,11.7]}(\theta)$，$m(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{6}1_{[11.1,11.7]}(\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{1}{6}\times 0.7$。所以 θ 的后验分布为

$$\pi(\theta|X)=\frac{h(X,\theta)}{m(X)}=\frac{1}{0.7}1_{[11.1,11.7]}(\theta)=\frac{10}{7}1_{[11.1,11.7]}(\theta)$$

□

3. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是来自几何分布的样本，总体分布列为

$$P(X=k|\theta)=\theta(1-\theta)^k, \quad k=0,1,2,\cdots,$$

θ 的先验分布是均匀分布 $U(0,1)$。

(1) 求 θ 的后验分布；

解：

$$p(\theta|x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{p(x_1,x_2,\cdots,x_n|\theta)\pi(\theta)}{\int_0^1 p(x_1,x_2,\cdots,x_n|\theta)\pi(\theta)\mathrm{d}\theta}=\frac{\prod_{i=1}^n\left[\theta(1-\theta)^{x_i}\right]1_{[0,1]}(\theta)}{\int_0^1\prod_{i=1}^n\left[\theta(1-\theta)^{x_i}\right]\mathrm{d}\theta}$$

□

(2) 若 4 次观测值为 $4,3,1,6$，求 θ 的贝叶斯估计。

解：

$$E(\theta|4,3,1,6)=\int_0^1\theta p(\theta|4,3,1,6)\mathrm{d}\theta=\text{实在算不出来了}$$

□

5. 验证：正态总体方差（均值已知）的共轭先验分布是倒伽马分布（称 X 服从倒伽马分布，如果 $\frac{1}{X}$ 服从倒伽马分布。

证明：

设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，且 $\sigma^2\sim \mathrm{IG}(\alpha,\gamma)$，则 $\frac{1}{\sigma^2}\sim \mathrm{Ga}(\alpha,\lambda)$，所以

$$h(X|\sigma^2)=p(X|\sigma^2)p(\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\cdot\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{\alpha-1}e^{-\frac{1}{\sigma^2}}$$

$$p(\sigma^2|X)=\frac{p(X|\sigma^2)p(\sigma^2)}{\int_0^{+\infty}p(X|\sigma^2)p(\sigma^2)\mathrm{d}\sigma^2}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\cdot\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{\alpha-1}e^{-\frac{1}{\sigma^2}}}{\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\cdot\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{\alpha-1}e^{-\frac{1}{\sigma^2}}\mathrm{d}\sigma^2}$$

计算可得 $p(\sigma^2|X)$ 也是倒伽马分布的概率密度函数，因此 σ^2 的后验分布也是倒伽马分布，从而正态总体方差（均值已知）的共轭先验分布是倒伽马分布。 □

6. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是来自如下总体的一个样本

$$p(x|\theta)=\frac{2x}{\theta^2},\quad 0<x<\theta$$

(1) 若 θ 的先验分布为均匀分布 $U(0,1)$，求 θ 的后验分布；

解：

$$\begin{aligned}h(x_1,x_2,\cdots,x_n,\theta)&=P(x_1,x_2,\cdots,x_n|\theta)\pi(\theta)\\&=\prod_{i=1}^n\frac{2x_i}{\theta^2}1_{[0,\theta]}(x_i)1_{[0,1]}(\theta)=1_{0<x_{(1)}}1_{x_{(n)}<\theta}\frac{1}{\theta^{2n}}\prod_{i=1}^n2x_i1_{[0,1]}(\theta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}m(x_1,x_2,\cdots x_n)&=\int_0^1h(x_1,x_2,\cdots,x_n,\theta)\mathrm{d}\theta=1_{0<x_{(1)}}\prod_{i=1}^n2x_i\int_0^11_{x_{(n)}<\theta}\frac{1}{\theta^{2n}}\mathrm{d}\theta\\&=1_{0<x_{(1)}}\prod_{i=1}^n2x_i\int_{x_{(n)}}^1\frac{1}{\theta^{2n}}\mathrm{d}x=1_{0<x_{(1)}}\left(-2n+1-(-2n+1)x_{(n)}^{-2n+1}\right)\prod_{i=1}^n2x_i\end{aligned}$$

所以 θ 的后验分布为

$$\pi(\theta|x_1,\cdots,x_n)=\frac{h(x_1,\cdots,x_n,\theta)}{m(x_1,\cdots,x_n)}=\frac{1_{x_{(n)}<\theta}1_{[0,1]}(\theta)}{\theta^{2n}\left(-2n+1-(-2n+1)x_{(n)}^{-2n+1}\right)}$$

□

(2) 若 θ 的先验分布为 $\pi(\theta)=3\theta^2, 0<\theta<1$，求 θ 的后验分布。

解：

$$h(x_1,x_2,\cdots,x_n,\theta)=P(x_1,x_2,\cdots,x_n|\theta)\pi(\theta)$$
$$=\prod_{i=1}^{n}\frac{2x_i}{\theta^2}1_{[0,\theta]}(x_i)3\theta^2 1_{[0,1]}(\theta)=1_{0<x_{(1)}}1_{x_{(n)}<\theta}\frac{3\theta^2}{\theta^{2n}}\left(\prod_{i=1}^{n}2x_i\right)1_{[0,1]}(\theta)$$
$$m(x_1,x_2,\cdots x_n)=\int_0^1 h(x_1,x_2,\cdots,x_n,\theta)\mathrm{d}\theta=1_{0<x_{(1)}}\prod_{i=1}^{n}2x_i\int_0^1 1_{x_{(n)}<\theta}\frac{3\theta^2}{\theta^{2n}}\mathrm{d}\theta$$
$$=1_{0<x_{(1)}}\prod_{i=1}^{n}2x_i\int_{x_{(n)}}^1\frac{3\theta^2}{\theta^{2n}}\mathrm{d}x=1_{0<x_{(1)}}\left(9-6n-(9-6n)x_{(n)}^{3-2n}\right)\prod_{i=1}^{n}2x_i$$

所以 θ 的后验分布为

$$\pi(\theta|x_1,\cdots,x_n)=\frac{h(x_1,\cdots,x_n,\theta)}{m(x_1,\cdots,x_n)}=\frac{1_{x_{(n)}<\theta}1_{[0,1]}(\theta)}{\theta^{2n}\left(9-6n-(9-6n)x_{(n)}^{3-2n}\right)}$$

□

8. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是来自均匀分布 $U(0,\theta)$ 的样本，θ 的先验分布是帕雷托分布，其密度函数为 $\pi(\theta)=\dfrac{\beta\theta_0^\beta}{\theta^{\beta+1}},\theta>\theta_0$，其中 β,θ_0 是两个已知的常数。

(1) 验证：帕雷托分布是 θ 的共轭先验分布；

证明：

令 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，则 $P(X|\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}1_{[0,\theta]}(x_i)=\frac{1}{\theta^n}1_{x_{(1)}\geqslant 0}1_{x_{(n)}\leqslant\theta}$

$$h(X,\theta)=P(X|\theta)\pi(\theta)=\frac{\beta\theta_0^\beta}{\theta^{\beta+1+n}}1_{x_{(1)}\geqslant 0}1_{x_{(n)}\leqslant\theta}$$

$$m(X)=\int_{x_{(n)}}^{+\infty}h(X,\theta)\mathrm{d}\theta=\beta\theta_0^\beta 1_{x_{(1)}\geqslant 0}\int_{x_{(n)}}^{+\infty}\theta^{-\beta-1-n}\mathrm{d}\theta=\frac{\beta\theta_0^\beta 1_{x_{(1)}\geqslant 0}}{\beta+n}x_{(n)}^{-\beta-n}$$

$$P(\theta|X)=\frac{h(X,\theta)}{m(X)}=\frac{\frac{1_{x_{(n)}\leqslant\theta}}{\theta^{\beta+n+1}}}{\frac{x_{(n)}^{-\beta-n}}{\beta+n}}=\frac{(\beta+n)x_{(n)}^{\beta+n}}{\theta^{\beta+n-1}}1_{x_{(n)}\leqslant\theta}$$

所以 θ 的后验分布为参数为 $\beta+n$ 和 $x_{(n)}$ 的帕雷托分布，从而帕雷托分布是 θ 的共轭先验分布。 □

(2) 求 θ 的贝叶斯估计。

解：

θ 的贝叶斯估计为

$$\widehat{\theta}=\int_{x_{(n)}}^{+\infty}\theta p(\theta|X)\mathrm{d}\theta=\int_{x_{(n)}}^{+\infty}\frac{\theta(\beta+n)x_{(n)}^{\beta+n}}{\theta^{\beta+n+1}}\mathrm{d}\theta=\frac{\beta+n}{\beta+n-1}x_{(n)}$$

□

12. 从正态总体 $N(\theta,2^2)$ 中随机抽取容量为 100 的样本，又设 θ 的先验分布为正态分布，证明：不管先验分布的标准差为多少，后验分布的标准差一定小于 $\frac{1}{5}$。

证明：

设样本为 X，θ 的先验分布为 $N(\mu,\sigma^2)$，则 θ 的后验概率密度函数为

$$\begin{aligned}\pi(\theta|X)&=cf(X|\theta)f(\theta)\\&=c\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\theta}{2}\right)^2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta-\mu}{\sigma}\right)^2}\\&=ce^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta-\mu}{\sigma}\right)^2-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\theta}{2}\right)^2}\\&\geqslant ce^{-\frac{1}{2}\cdot25(\theta-\mu-\overline{x})^2}\end{aligned}$$

所以后验分布的标准差一定小于 $\frac{1}{5}$。 □

13. 设随机变量 X 服从负二项分布，其概率分布为

$$f(x|p)=\binom{x-1}{k-1}p^k(1-p)^{x-k},\quad x=k,k+1,\cdots$$

证明其成功概率 p 的共轭先验分布族为贝塔分布族。

证明：

设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$。设 p 的先验分布为贝塔分布 $Be(a,b)$，则 $\pi(p)=\frac{1}{B(a,b)}p^{a-1}(1-p)^{b-1}$，所以

$$\begin{aligned}P(p|X)=c\cdot h(X,p)=c\cdot P(X|p)\pi(p)&=c\left(\prod_{i=1}^{n}\mathrm{C}_{x_i-1}^{k-1}p^k(1-p)^{x_i-k}\right)\frac{1}{B(a,b)}p^{a-1}(1-p)^{b-1}\\&=cp^{nk}(1-p)^{-nk}(1-p)^{\sum_{i=1}^{n}x_i}p^{a-1}(1-p)^{b-1}\\&=cp^{nk+a-1}(1-p)^{\sum_{i=1}^{n}x_i-nk+b-1}\end{aligned}$$

其中 c 为与 p 无关的数。

所以 p 的后验分布为 $Be(nk+a,\sum_{i=1}^{n}x_i-nk+b)$，从而 p 的共轭先验分布族为贝塔分布族。 □

14. 从一批产品中抽检 100 个，发现 3 个不合格，假定该产品不合格率 θ 的先验分布为贝塔分布 $Be(2,200)$，求 θ 的后验分布。

解：

设总体为 X，则 $X \sim b(100,\theta)$，所以

$$\begin{aligned}P(\theta|X) &= c\cdot P(X|\theta)\pi(\theta) = c\cdot \mathrm{C}_{100}^{3}\theta^3(1-\theta)^{97}\frac{1}{B(2,200)}\theta^1(1-\theta)^{199}\\ &= c\cdot\theta^4(1-\theta)^{296}\end{aligned}$$

其中 c 为与 θ 无关的数。

所以 θ 的后验分布为 $Be(5,297)$。 □

6.6 区间估计

3. $0.50, 1.25, 0.80, 2.00$ 是取自总体 X 的样本，已知 $Y = \ln X$ 服从正态分布 $N(\mu, 1)$。

(1) 求 μ 的置信水平为 95% 的置信区间；

解：

$$\frac{1-0.95}{2} = 0.025, \quad u_{0.025} = -1.96, \quad \frac{u_{0.025}}{\sqrt{n}} = \frac{-1.96}{\sqrt{4}} = -0.98$$

$$\overline{\ln x} = \frac{1}{4}(\ln 0.50 + \ln 1.25 + \ln 0.80 + \ln 2.00) = 0$$

所以 μ 的置信水平为 95% 的置信区间为 $[-0.98, 0.98]$。 □

(2) 求 X 的数学期望的置信水平为 95% 的置信区间。

解：

$$EX = Ee^Y = e^{EY} = e^{\mu}$$

所以 EX 的置信水平为 95% 的置信区间为 $[e^{-0.98}, e^{0.98}]$，即$[0.3753110988514, 2.66445624192942]$。

□

5. 已知某种材料的抗压强度 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，现随机地抽取 10 个试件进行抗压试验，测得数据如下：

482 493 457 471 510 446 435 418 394 469

(1) 求平均抗压强度 μ 的置信水平为 95% 的置信区间；

解：

由于 σ 未知，所以 μ 的置信区间为 $\left[\bar{x}-t_{1-0.025}(10-1)s/\sqrt{10},\bar{x}+t_{1-0.025}(10-1)s/\sqrt{10}\right]$ 之后计算得

$$\bar{x}=457.5,\quad s\approx 35.21757768$$

所以 μ 的置信水平为 95% 的置信区间为

$$[457.5-2.2622\times 35.21757768/\sqrt{10},457.5-2.2622\times 35.21757768/\sqrt{10}]$$

即

$$[432.306385526736,482.693614473264]$$

□

(2) 若已知 $\sigma=30$，求平均抗压程度 μ 的置信水平为 95% 的置信区间；

解：

由于 σ 已知，所以 μ 的 95% 置信区间为 $[\bar{x}-u_{0.975}\sigma/\sqrt{n},\bar{x}+u_{0.975}\sigma/\sqrt{n}]$，代入得

$$\left[457.5-1.96\times 30/\sqrt{10},457.5+1.96\times 30/\sqrt{10}\right]$$

即

$$[438.90580735821,476.09419264179]$$

□

(3) 求 σ 的置信水平为 95% 的置信区间。

解：

μ 未知时 σ 的置信水平为 95% 的置信区间为 $\left[\frac{s\sqrt{n-1}}{\sqrt{\chi^2_{0.975}(n-1)}},\frac{s\sqrt{n-1}}{\sqrt{\chi^2_{0.025}(n-1)}}\right]$，代入得

$$\left[\frac{35.21757768\times\sqrt{10-1}}{\sqrt{19.0228}},\frac{35.21757768\times\sqrt{10-1}}{\sqrt{2.7004}}\right]$$

即

$$[24.2238693218913,64.2934434191729]$$

□

6. 在一批货物中随机抽取 80 件，发现有 11 件不合格品，试求这批货物的不合格品率的置信水平为 0.90 的置信区间。

解：

样本的分布为 $b(1,p)$。由于样本量较大，可以使用近似置信区间，即 $\left[\bar{x}-u_{0.95}\sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}},\bar{x}+u_{0.95}\sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}\right]$，其中 $\bar{x}=\frac{11}{80}=0.1375$，$n=80$，$u_{0.95}=1.645$，代入得

$$\left[0.1375-1.645\times\sqrt{\frac{0.1375\times(1-0.1375)}{80}},0.1375+1.645\times\sqrt{\frac{0.1375\times(1-0.1375)}{80}}\right]$$

即

$$[0.0741638282314373,0.200836171768563]$$

□

9. 设从总体 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 和总体 $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 中分别抽取容量为 $n_1=10,n_2=15$ 的独立样本，可计算得 $\bar{x}=82,s_x^2=56.5,\bar{y}=76,s_y^2=52.4$。

(1) 若已知 $\sigma_1^2=64,\sigma_2^2=49$，求 $\mu_1-\mu_2$ 的置信水平为 95% 的置信区间；

解：

σ_1^2 和 σ_2^2 均已知，则 $\mu_1-\mu_2$ 的置信水平为 95% 的置信区间为 $\left[\bar{x}-\bar{y}-u_{0.975}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}},\bar{x}-\bar{y}+u_{0.975}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right]$，代入得

$$\left[82-76-1.96\times\sqrt{\frac{64}{10}+\frac{49}{15}},\ 82-76+1.96\times\sqrt{\frac{64}{10}+\frac{49}{15}}\right]$$

即

$$[-0.0938876480180258,\ 12.093887648018]$$

□

(2) 若已知 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$，求 $\mu_1-\mu_2$ 的置信水平为 95% 的置信区间；

解：

$\sigma_1^2=\sigma_2^2$ 未知，则 $\mu_1-\mu_2$ 的置信水平为 95% 的置信区间为

$$\left[\bar{x}-\bar{y}-\sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1n_2}}s_wt_{0.975}(n_1+n_2-2),\ \bar{x}-\bar{y}+\sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1n_2}}s_wt_{0.975}(n_1+n_2-2)\right]$$

其中 $s_w^2=\dfrac{(n_1-1)s_x^2+(n_2-1)s_y^2}{n_1+n_2-2}$，$t_{0.975}(23)=2.0687$，代入得

$$s_w^2=\frac{(10-1)\times56.5+(15-1)\times52.4}{10+15-2}=\frac{12421}{230}$$

置信区间为

$$\left[82-76-\sqrt{\frac{10+15}{10\times15}}\sqrt{\frac{12421}{230}}\times2.0687,\ 82-76+\sqrt{\frac{10+15}{10\times15}}\sqrt{\frac{12421}{230}}\times2.0687\right]$$

即

$$[-0.206349837966326,\ 12.2063498379663]$$

□

(3) 若对 σ_1^2, σ_2^2 一无所知，求 $\mu_1-\mu_2$ 的置信水平为 95% 的置信区间；

解：

此时为一般场合下，$\mu_1-\mu_2$ 的置信水平为 95% 的近似置信区间为 $[\bar{x}-\bar{y}-s_0t_{0.975}(l),\ \bar{x}-\bar{y}+s_0t_{0.975}(l)]$，其中 $s_0^2=\frac{s_x^2}{n_1}+\frac{s_y^2}{n_2}=\frac{56.5}{10}+\frac{52.4}{15}=\frac{2743}{300}$，
$l=\dfrac{s_0^4}{\frac{s_x^4}{n_1^2(n_1-1)}+\frac{s_y^4}{n_2^2(n_2-1)}}=\dfrac{\left(\frac{2743}{300}\right)^2}{\frac{56.5^2}{10^2(10-1)}+\frac{52.4^2}{15^2(15-1)}}=\dfrac{52668343}{2783727}\approx 18.92008\approx 19$，
$t_{0.975}(19)=2.0930$。

所以置信区间为

$$\left[82-76-\sqrt{\frac{2743}{300}}\times 2.0930,\ 82-76+\sqrt{\frac{2743}{300}}\times 2.0930\right]$$

即

$$[-0.328801942179367,\ 12.3288019421794]$$

□

(4) 求 σ_1^2/σ_2^2 的置信水平为 95% 的置信区间。

解：

置信区间为

$$\left[\frac{s_x^2}{s_y^2}\cdot\frac{1}{F_{0.975}(9,14)},\quad \frac{s_x^2}{s_y^2}\cdot\frac{1}{F_{0.025}(9,14)}\right]$$

由于 $F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1,n_2)=1/F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_2,n_1)$，所以可以代入得

$$\left[\frac{56.5}{52.4}\cdot\frac{1}{3.21},\ \frac{56.5}{52.4}\cdot 3.80\right]$$

即

$$[0.335901643242729,\ 4.09732824427481]$$

□

12. 设某电子产品的寿命服从指数分布，其密度函数为 $\lambda e^{-\lambda x}I_{\{x>0\}}$，现从此批产品中抽取容量为 9 的样本，测得寿命为（单位：千小时）

15 45 50 53 60 65 70 83 90

求平均寿命 $1/\lambda$ 的置信水平为 0.9 的置信区间和置信上、下限。

解：

首先尝试构造枢轴量，设样本为 $x_1, x_2, \cdots, x_9$，则 $x_1, x_2, \cdots x_9 \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathrm{Exp}(\lambda)$，则 $\sum_{i=1}^9 x_i \sim \mathrm{Ga}(9, \lambda)$，所以 $2\lambda \sum_{i=1}^9 x_i \sim \mathrm{Ga}(9, \frac{1}{2}) = \chi^2(18)$，分布不依赖于 λ，所以 $G = 2\lambda \sum_{i=1}^9 x_i$ 为枢轴量，所以

$$P\left(\chi^2_{0.05}(18) \leqslant G \leqslant \chi^2_{0.95}(18)\right) = 0.9$$

$$P\left(\frac{\chi^2_{0.05}(18)}{2\sum_{i=1}^9 x_i} \leqslant \lambda \leqslant \frac{\chi^2_{0.95}(18)}{2\sum_{i=1}^9 x_i}\right) = 0.9$$

所以 λ 的置信水平为 0.9 的双侧置信区间为

$$\left[\frac{\chi^2_{0.05}(18)}{2\sum_{i=1}^9 x_i}, \frac{\chi^2_{0.95}(18)}{2\sum_{i=1}^9 x_i}\right] = \left[\frac{9.3905}{2 \times 531}, \frac{28.8693}{2 \times 531}\right] = [0.00884227871939736,\ 0.0271838983050847]$$

同理，单侧置信上限为

$$\frac{\chi^2_{0.9}(18)}{2\sum_{i=1}^9 x_i} = \frac{25.9894}{2 \times 531} = 0.0244721280602637$$

单侧置信下限为

$$\frac{\chi^2_{0.1}(18)}{2\sum_{i=1}^9 x_i} = \frac{10.8649}{2 \times 531} = 0.0102306026365348$$

所以 $\frac{1}{\lambda}$ 的置信水平为 0.9 的置信区间为

$$\left[\frac{2 \times 531}{28.8693}, \frac{2 \times 531}{9.3905}\right] = [\mathbf{36.7864825264208},\ \mathbf{113.093019541025}]$$

单侧置信上限为

$$\frac{2 \times 531}{10.8649} = \mathbf{97.74595256284}$$

单侧置信下限为

$$\frac{2 \times 531}{25.9894} = \mathbf{40.8628133008073}$$

□

13. 设总体 X 的密度函数为

$$p(x;\theta) = \frac{1}{\pi\left[1 + (x-\theta)^2\right]}, \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < \theta < \infty$$

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为抽自此总体的简单随机样本，求位置参数 θ 的置信水平近似为 $1-\alpha$ 的置信区间。

解：

设 $m_{0.5}$ 表示样本中位数，则根据例 5.3.10，当然 n 较大时，$m_{0.5} \sim N\left(\theta, \frac{\pi^2}{4n}\right)$，将 $m_{0.5}$ 看作样本容量为 1 的样本，则 $m_{0.5}$ 服从方差已知，期望未知的正态分布，所以 θ 的置信水平近似为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[m_{0.5} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\pi^2}{4n}}/\sqrt{1},\ m_{0.5} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\pi^2}{4n}}/\sqrt{1}\right]$$

即

$$\left[m_{0.5} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\pi}{2\sqrt{n}},\ m_{0.5} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\pi}{2\sqrt{n}}\right]$$

□

14. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为抽自正态总体 $N(\mu, 16)$ 的简单随机样本，为使得 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间的长度不大于给定的 L，试问样本容量 n 至少要多少?

解：

$\sigma^2 = 16$ 已知，则置信区间为 $\left[\bar{x} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma/\sqrt{n}, \bar{x} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma/\sqrt{n}\right]$，区间长度为 $2u_{1-\frac{\alpha}{2}} \times 4/\sqrt{n} \leqslant L$，则 $n \geqslant \left(\frac{8u_{1-\frac{\alpha}{2}}}{L}\right)^2 = \frac{64u_{1-\frac{\alpha}{2}}^2}{L^2}$。 □

16. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是来自 $U(\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2})$ 的样本，求 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间（提示：证明 $\frac{x_{(n)} + x_{(1)}}{2} - \theta$ 为枢轴量，并求出对应的密度函数）。

解：

设总体为 X，则 $X \sim U(\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2})$，则 $X - \theta + \frac{1}{2} \sim U(0,1)$，则根据例 5.3.9，$(Y, Z) = \left(x_{(1)} - \theta + \frac{1}{2}, x_{(n)} - \theta + \frac{1}{2}\right)$ 的联合密度函数为

$$p(y,z) = n(n-1)(z-y)^{n-2}$$

再根据卷积公式，$y + z = x_{(1)} + x_{(n)} - 2\theta + 1$ 的概率密度函数为

$$p(x) = \int_0^1 n(n-1)(x-2t)^{n-2}\mathrm{d}t = \frac{n}{2}x^{n-1} - \frac{n}{2}(x-2)^{n-1}$$

所以 $\frac{(y+z)-1}{2} = \frac{x_{(1)}+x_{(n)}}{2} - \theta$ 的概率密度函数为

$$p'(x) = \frac{n}{2}(2x+1)^{n-1} - \frac{n}{2}(2x-1)^{n-1}$$

显然与 θ 无关，所以令 $G = \frac{x_{(1)}+x_{(n)}}{2} - \theta$ 即为枢轴量，则可知

$$\int_{-\frac{1-\alpha^{\frac{1}{n}}}{2}}^{\frac{1-\alpha^{\frac{1}{n}}}{2}} \frac{n}{2}(2x+1)^{n-1} - \frac{n}{2}(2x-1)^{n-1}\mathrm{d}x = 1-\alpha$$

所以 $-\frac{1-\alpha^{\frac{1}{n}}}{2} \leqslant G = \frac{x_{(1)}+x_{(n)}}{2} - \theta \leqslant \frac{1-\alpha^{\frac{1}{n}}}{2}$，所以 $\frac{x_{(1)}+x_{(n)}}{2} - \frac{1-\alpha^{\frac{1}{n}}}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{x_{(1)}+x_{(n)}}{2} + \frac{1-\alpha^{\frac{1}{n}}}{2}$ 所以 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[\frac{x_{(1)}+x_{(n)}}{2} - \frac{1-\alpha^{\frac{1}{n}}}{2},\ \frac{x_{(1)}+x_{(n)}}{2} + \frac{1-\alpha^{\frac{1}{n}}}{2}\right]$$

□

19. 设总体 X 的密度函数为

$$p(x,\theta)=e^{-(x-\theta)}I_{\{x>\theta\}},\quad -\infty<\theta<\infty,$$

$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为抽自此总体的简单随机样本。

(1) 证明：$x_{(1)}-\theta$ 的分布与 θ 无关，并求出此分布；

证明：

令 $y=x-\theta$, 则 $p(y)=e^{-y}I_{\{y>0\}}$。由于 $y=x-\theta$ 是单调增函数, 所以 $y_{(1)}=x_{(1)}-\theta$。$F(y)=\int_0^y e^{-t}\mathrm{d}t=1-e^{-y}$，从而次序统计量 $y_{(1)}=x_{(1)}-\theta$ 的概率密度函数为

$$p_{(1)}(y)=\frac{n!}{0!(n-1)!}[F(y)]^0\,[1-F(y)]^{n-1}\,p(y)=n\left(e^{-y}\right)^{n-1}e^{-y}I_{\{y>0\}}=ne^{-ny}I_{\{y>0\}}$$

所以 $x_{(1)}-\theta\sim\mathrm{Exp}(n)$，与 θ 无关。 □

(2) 求 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间。

解：

$$P(c\leqslant x_{(1)}-\theta\leqslant d)=\int_c^d ne^{-ny}\mathrm{d}y$$

因为被积函数在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，所以区间长度最短则 $c=0$，所以

$$\int_0^d ne^{-ny}\mathrm{d}y=-e^{-ny}\Big|_0^d=1-e^{-nd}=1-\alpha$$

所以 $d=\dfrac{-\ln\alpha}{n}$。

而 $c\leqslant x_{(1)}-\theta\leqslant d\implies x_{(1)}-d\leqslant\theta\leqslant x_{(1)}-c\implies x_{(1)}+\frac{\ln\alpha}{n}\leqslant\theta\leqslant x_{(1)}$，所以 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[x_{(1)}+\frac{\ln\alpha}{n},\ x_{(1)}\right]$$

□

第七章　假设检验

7.1　假设检验的基本思想与概念

1. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是来自 $N(\mu, 1)$ 的样本，考虑如下假设检验问题

$$H_0: \mu = 2 \quad \text{vs} \quad H_1: \mu = 3,$$

若检验由拒绝域为 $W = \{\bar{x} \geqslant 2.6\}$ 确定。

(1) 当 $n = 20$ 时求检验犯两类错误的概率;

解：

第一类错误：$\alpha = P(\bar{x} \geqslant 2.6 | H_0)$，当 H_0 成立即 $\mu = 2$ 时 $\bar{x} \sim N\left(2, \frac{1}{20}\right)$，所以

$$\alpha = P\left(\frac{\bar{x} - 2}{\sqrt{\frac{1}{20}}} \geqslant \frac{2.6 - 2}{\sqrt{\frac{1}{20}}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{2.6 - 2}{\sqrt{\frac{1}{20}}}\right) = 0.0036452$$

```
R((2.6-2)⌟√(1⌟20)
            0.0036452
```

第二类错误：$\beta = P(\bar{x} < 2.6 | H_1)$，当 H_1 成立即 $\mu = 3$ 时 $\bar{x} \sim N\left(3, \frac{1}{20}\right)$，所以

$$\beta = P\left(\frac{\bar{x} - 3}{\sqrt{\frac{1}{20}}} < \frac{2.6 - 3}{\sqrt{\frac{1}{20}}}\right) = \Phi\left(\frac{2.6 - 3}{\sqrt{\frac{1}{20}}}\right) = 0.036819$$

```
P((2.6-3)⌟√(1⌟20)
             0.036819
```

□

(2) 如果要使得检验犯第二类错误的概率 $\beta \leqslant 0.01$，n 最小应取多少?

解：

$$\beta = P(\bar{x} < 2.6|H_1) = P\left(\frac{\bar{x}-3}{\sqrt{\frac{1}{n}}} < \frac{2.6-3}{\sqrt{\frac{1}{n}}}\right) \leqslant 0.01$$

即 $\Phi\left(\frac{-0.4}{\sqrt{\frac{1}{n}}}\right) \leqslant 0.01$，即 $\Phi\left(\frac{0.4}{\sqrt{\frac{1}{n}}}\right) \geqslant 0.99$，即 $\frac{0.4}{\sqrt{\frac{1}{n}}} \geqslant 2.33$，解得 $n \geqslant 33.930625$，所以 n 最小应取 34. □

(3) 证明：当 $n \to \infty$ 时，$\alpha \to 0, \beta \to 0$。

证明：

$$\alpha = P\left(\frac{\bar{x}-2}{\sqrt{\frac{1}{n}}} \geqslant \frac{2.6-2}{\sqrt{\frac{1}{n}}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{0.6}{\sqrt{\frac{1}{n}}}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\beta = P\left(\frac{\bar{x}-3}{\sqrt{\frac{1}{n}}} < \frac{2.6-3}{\sqrt{\frac{1}{n}}}\right) = \Phi\left(\frac{-0.4}{\sqrt{\frac{1}{n}}}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

□

3. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_{16}$ 是来自正态总体 $N(\mu, 4)$ 的样本，考虑检验问题

$$H_0: \mu = 6 \quad \text{vs} \quad H_1: \mu \neq 6$$

拒绝域取为 $W = \{|\bar{x}-6| \geqslant c\}$，试求 c 使得检验的显著性水平为 0.05，并求该检验在 $\mu = 6.5$ 处犯第二类错误的概率。

解：

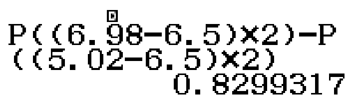
当 H_0 成立即 $\mu = 6$ 时，$\bar{x} \sim N(\mu, \frac{4}{16}) = N(6, \frac{1}{4})$，所以

$$p = P\left(|\bar{x}-6| \geqslant c|\mu = 6\right) = P\left(\frac{|\bar{x}-6|}{\frac{1}{2}} \geqslant 2c \middle| \mu = 6\right) = 2(1 - \Phi(2c)) = 0.05$$

则 $\Phi(2c) = 0.975$，所以 $2c = 1.96$，从而 $\boldsymbol{c = 0.98}$。

当 $\mu = 6.5$ 时，$\bar{x} \sim N(6.5, 0.25)$，所以该检验在 $\mu = 6.5$ 处犯第二类错误的概率为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta} &= P\left(|\bar{x}-6| < c \mid \mu = 6.5\right) = P\left(5.02 < \bar{x} < 6.98\right) \\ &= P\left(\frac{5.02-6.5}{0.5} < \bar{x} < \frac{6.98-6.5}{0.5}\right) = \Phi\left(\frac{6.98-6.5}{0.5}\right) - \Phi\left(\frac{5.02-6.5}{0.5}\right) \boldsymbol{= 0.8299317}\end{aligned}$$



□

4. 设总体为均匀分布 $U(0,\theta)$，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是样本，考虑检验问题

$$H_0:\theta\geqslant 3 \quad \text{vs} \quad H_1:\theta<3,$$

拒绝域取为 $W=\{x_{(n)}\leqslant 2.5\}$，求检验犯第一类错误的最大值 α，若要使得该最大值 α 不超过 0.05，n 至少应取多大?

解：

$x_{(n)}$ 的密度函数为 $f_n(x)=\frac{nx^{n-1}}{\theta^n}1_{(0,\theta)}(x)$，所以检验犯第一类错误的概率为

$$\alpha'=P(x_{(n)}\leqslant 2.5|H_0)=P(x_{(n)}\leqslant 2.5|\theta\geqslant 3)=\int_0^{2.5}\frac{nx^{n-1}}{\theta^n}\mathrm{d}x=\left(\frac{5}{2}\right)^n\theta^{-n}$$

当 θ 取 3 时 α' 取到最大值 $\boldsymbol{\alpha}=\left(\frac{5}{2}\right)^n 3^{-n}=\boldsymbol{\left(\frac{6}{5}\right)^{-n}}$，而 $\alpha=\left(\frac{6}{5}\right)^{-n}=0.05$ 解得 $n=-\frac{\ln(20)}{-\ln(6)+\ln(5)}=16.4310371534373$，所以 n 至少应取 **17**。 □

8. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_{30}$ 为取自泊松分布 $P(\lambda)$ 的随机样本。

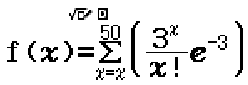
(1) 试给出单侧假设检验问题 $H_0:\lambda\leqslant 0.1 \quad \text{vs} \quad H_1:\lambda>0.1$ 的显著性水平 $\alpha=0.05$ 的检验;

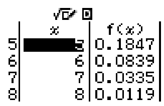
由于泊松分布关于参数 λ 具有可加性，所以 $\sum_{k=1}^n x_k\sim P(30\lambda)$，所以选取 $\sum_{k=1}^n x_k$ 作为统计量，设拒绝域为 W，则

$$P(W|H_0)=P(W|\lambda\leqslant 0.1)=\sum_{k=c}^{\infty}\frac{(30\lambda)^k}{k!}e^{-30\lambda}\leqslant 0.05$$

当 λ 越大则犯第一类错误的概率越大，所以此时 λ 可以取 0.1，则

$$\sum_{k=c}^{\infty}\frac{(30\lambda)^k}{k!}e^{-30\lambda}=\sum_{k=c}^{\infty}\frac{3^k}{k!}e^{-3}$$





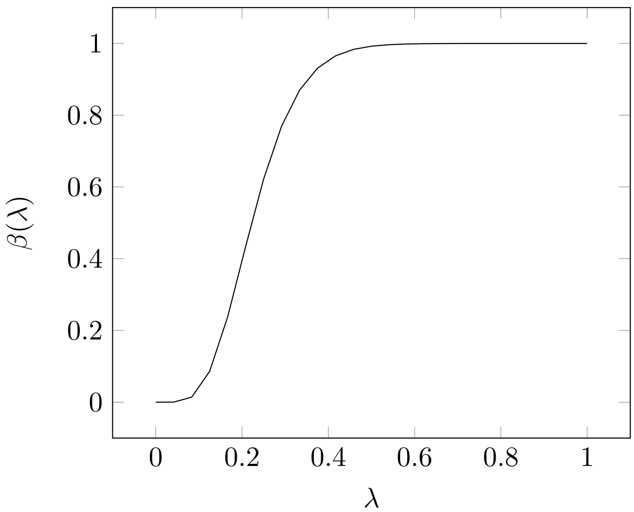
5

(图中的 50 可以为任何较大的自然数) 可以看到当 c 取 6 时上式大于 0.05，当 c 取 7 时上式小于 0.05，所以所求检验的拒绝域为 $W=\left\{\sum_{k=1}^{30}x_k\geqslant 7\right\}$。

(2) 求此检验的势函数 $\beta(\lambda)$ 在 $\lambda=0.05,0.2,0.3,\cdots,0.9$ 时的值，并据此画出 $\beta(\lambda)$ 的图像。

$$\begin{aligned}\beta(\lambda)&=P_\lambda\left(\sum_{k=1}^{30}x_i\geqslant 7\right)=\sum_{k=7}^{\infty}\frac{(30\lambda)^k}{k!}e^{-30\lambda}\\&=(-1012500\lambda^6-202500\lambda^5-33750\lambda^4-4500\lambda^3-450\lambda^2-30\lambda+e^{30\lambda}-1)e^{-30\lambda}\end{aligned}$$

使用 LaTeX 的 pgfplots 宏包画图如下:



7.2　正态总体参数假设检验

说明：本节习题均采用拒绝域的形式完成，在可以计算检验的 p 值时要求计算出 p 值。

1. 有一批枪弹，出厂时，其初速率 $v \sim N(950, 100)$（单位：m/s）。经过较长时间储存，取 9 发进行测试，得样本值（单位：m/s）如下：

$$914 \quad 920 \quad 910 \quad 934 \quad 953 \quad 945 \quad 912 \quad 924 \quad 940$$

据经验，枪弹经储存后其初速率仍服从正态分布，且标准差保持不变，问是否可以认为这批枪弹的初速率有显著降低（$\alpha = 0.05$）?

解：

设总体的均值为 μ，则待检验的原假设 H_0 和备选假设 H_1 分别为

$$H_0 : \mu = 950 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu < 950$$

拒绝域为 $\{u \leqslant u_\alpha\}$，即 $\left\{\frac{\bar{x}-950}{10/3} \leqslant u_{0.05}\right\}$ 即 $\left\{\bar{x} \leqslant -1.645 \times \frac{10}{3} + 950 \approx 944.5167\right\}$。

根据样本计算得出 $\bar{x} = 928$，在拒绝域内，因此可以认为这批枪弹的初速率有显著降低。

再计算 p 值，

$$p = \Phi\left(\frac{928 - 950}{10/3}\right) = \mathbf{2.0665 \times 10^{-11}} < 0.05$$

□

5. 设需要对某正态总体的均值进行假设检验

$$H_0 : \mu = 15 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu < 15$$

已知 $\sigma^2 = 2.5$，取 $\alpha = 0.05$，若要求当 H_1 中的 $\mu \leqslant 13$ 时犯第二类错误的概率不超过 0.05，求所需的样本容量。

解：

由于已知 $\sigma^2 = 2.5$，所以拒绝域为 $\left\{\frac{\bar{x}-15}{\sqrt{2.5/n}} \leqslant u_{0.05}\right\}$

$$\beta = P\left(\frac{\bar{x}-15}{\sqrt{2.5/n}} > u_{0.05} \middle| \mu \leqslant 13\right) \leqslant 0.05$$

其中

$$P\left(\frac{\bar{x}-15}{\sqrt{2.5/n}} > u_{0.05}\right) = P\left(\frac{\bar{x}-\mu+\mu-15}{\sqrt{2.5/n}} > u_{0.05}\right) = P\left(\frac{\bar{x}-\mu}{\sqrt{2.5/n}} > u_{0.05} + \frac{15-\mu}{\sqrt{2.5/n}}\right)$$
$$= 1 - \Phi\left(-1.645 + \frac{15-\mu}{\sqrt{2.5/n}}\right) \leqslant 0.05$$

所以 $\Phi\left(-1.645 + \frac{15-\mu}{\sqrt{2.5/n}}\right) \geqslant 0.95$，从而 $-1.645 + \frac{15-\mu}{\sqrt{2.5/n}} \geqslant 1.645$ 需要在 $\mu \leqslant 13$ 时成立，由于左侧关于 μ 递减，所以当 $\mu = 13$ 时，解 $-1.645 + \frac{15-13}{\sqrt{2.5/n}} = 1.645$ 可得 $n = 6.7650625$，所以所需的样本容量至少为 **7**。

□

6. 从一批钢管中抽取 10 根，测得其内径（单位：mm）为

100.36 100.31 99.99 100.11 100.64 100.85 99.42 99.91 99.35 100.10

设这批钢管内径服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，试分别在下列条件下检验假设（$\alpha = 0.05$）：

$$H_0 : \mu = 100 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu > 100$$

(1) 已知 $\sigma = 0.5$；

解：

拒绝域为 $\left\{\dfrac{\bar{x}-100}{0.5/\sqrt{10}} \geqslant u_{1-\alpha}\right\} = \left\{\bar{x} \geqslant u_{0.95} \times 0.5\sqrt{10} + 100\right\} = \{\bar{x} \geqslant 102.60\}$

根据样本计算得出 $\bar{x} = 100.104$，不在拒绝域中，所以不能拒绝原假设。

再计算 p 值，

$$p = 1 - \Phi\left(\frac{100.104-100}{0.5}\right) = \mathbf{0.082385} > 0.05$$

□

(2) σ 未知。

解：

拒绝域为

$$\left\{\frac{\bar{x}-100}{s/\sqrt{10}} \geqslant t_{0.95}(9)\right\} = \left\{\frac{\bar{x}-100}{s/\sqrt{10}} \geqslant 1.8331\right\}$$

根据样本计算得出 $\bar{x}=100.104, s=0.4759598489$，所以 $\frac{\bar{x}-100}{s/\sqrt{10}}=0.690976092663247$ 不在拒绝域内，所以不能拒绝原假设。

再计算 p 值，

$$p=P_{t\sim t(9)}\,(t\geqslant 0.690976092663247)>1-0.7027=\mathbf{0.2973}>0.05$$

□

14. 在针织品漂白工艺过程中，要考察温度对针织品断裂强力（主要质量指标）的影响。为了比较 70℃ 与 80℃ 的影响有无差别，在这两个温度下，分别重复做了 8 次试验，得数据（单位：N）如下：

70℃ 时的强力：	20.5	18.8	19.8	20.9	21.5	19.5	21.0	21.2,
80℃ 时的强力：	17.7	20.3	20.0	18.8	19.0	20.1	20.0	19.l.

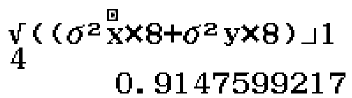
根据经验，温度对针织品断裂强度的波动没有影响。问在 70℃ 时的平均断裂强力与 80℃ 时的平均断裂强力间是否有显著差别（假定断裂强力服从正态分布，取 a= 0.05）？

解：

使用 t 检验，检验的问题为

$$H_0:\mu_1=\mu_2 \quad \text{vs} \quad H_1:\mu_1\neq\mu_2$$

根据样本计算得出 $\bar{x}=20.4, \bar{y}=19.375, s_u=\sqrt{\frac{1}{8+8-2}(8\sigma_x^2+8\sigma_y^2)}=0.9147599217$。



$$t=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{s_u\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}}=\frac{20.4-19.375}{0.9147599217\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}}\approx 2.2410, \quad W=\{|t|\geqslant t_{0.975}(14)\}=\{|t|\geqslant 2.1448\}$$

t 在拒绝域内，所以拒绝原假设，所以在 70℃ 时的平均断裂强力与 80℃ 时的平均断裂强力间**有显著差别**。

再计算 p 值，$p=2(1-\Phi(|2.2410|))=0.012513<0.05$，确实应拒绝原假设。 □

15. 一药厂生产一种新的止痛片，厂方希望验证服用新药片后至开始起作用的时间间隔较原有止痛片至少缩短一半，因此厂方提出需检验假设

$$H_0:\mu_1=2\mu_2 \quad \text{vs} \quad H_1:\mu_1>2\mu_2$$

此处 μ_1,μ_2 分别是服用原有止痛片和服用新止痛片后至开始起作用的时间间隔的总体的均值。设两总体均为正态分布且方差分别为已知值 σ_1^2,σ_2^2，现分别在两总体中取一样本 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 和 $y_1,y_2,\cdots,y_m$，设两个样本独立。试给出上述假设检验问题的检验统计量及拒绝域.

解：

使用 u 检验，检验统计量为 $u=\dfrac{\bar{x}-2\bar{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{4\sigma_2^2}{m}}}$，拒绝域为 $W=\{u\geqslant u_{1-\alpha}\}$。 □

26. 测得两批电子器件的样品的电阻（单位：Ω）为

A 批 (x): 0.140 0.138 0.143 0.142 0.144 0.137;

B 批 (y): 0.135 0.140 0.142 0.136 0.138 0.140.

设这两批器材的电阻值分别服从分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2),N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且两样本独立。

使用 Excel 计算如下：

x	y
0.14	0.135
0.138	0.14
0.143	0.142
0.142	0.136
0.144	0.138
0.137	0.14

F-检验 双样本方差分析

	x	y
平均	0.140667	0.1385
方差	7.87E-06	7.1E-06
观测值	6	6
df	5	5
F	1.107981	
P(F<=f) 单尾	0.456576	
F 单尾临界	5.050329	

t-检验：双样本异方差假设

	x	y
平均	0.140667	0.1385
方差	7.87E-06	7.1E-06
观测值	6	6
假设平均差	0	
df	10	
t Stat	1.371845	
P(T<=t) 单尾	0.100051	
t 单尾临界	1.812461	
P(T<=t) 双尾	0.200102	
t 双尾临界	2.228139	

(1) 试检验两个总体的方差是否相等（取 $\alpha=0.05$）。

解：

使用 F 检验，不能拒绝原假设，所以相等。 □

(2) 试检验两个总体的均值是否相等（取 $\alpha=0.05$）。

解：

使用 t 检验，不能拒绝原假设，所以相等。 □

7.3 其他分布参数的假设检验

2. 某厂一种元件平均使用寿命为 1200 h（偏低），现厂里进行技术革新，革新后任选 8 个元件进行寿命试验，测得寿命数据如下

2686 2001 2082 792 1660 4105 1416 2089

假定元件寿命服从指数分布，取 $\alpha=0.05$，问革新后元件的平均寿命是否有明显提高？

解：

使用 χ^2 检验假设

$$H_0:\theta\leqslant 1200 \quad \text{vs} \quad H_1:\theta>1200$$

$\chi^2=\frac{2\times 8\bar{x}}{1200}\approx 28.0517$，拒绝域为 $\{\chi^2\geqslant\chi^2_{0.95}(2\times 8)\approx 26.2962\}$，所以拒绝原假设，革新后元件的平均寿命**有明显提高**。 □

3. 有人称某地成年人中大学毕业生比率不低于 30%。为检验之，随机调查该地 15 名成年人，发现有 3 名大学毕业生，取 $\alpha=0.05$，问该人看法是否成立？并给出检验的 p 值。

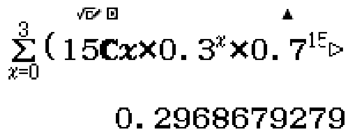
解：

样本的分布为 $x\sim b(15,p')$，检验的假设为

$$H_0:p'\geqslant 0.3 \quad \text{vs} \quad H_1:p'<0.3$$

检验的 p 值为 $p=P(x\leqslant 3)$，其中 $x\sim b(15,0.3)$，所以

$$\boldsymbol{p}=\sum_{k=0}^{3}\mathrm{C}_{15}^{k}0.3^k0.7^{15-k}\approx\mathbf{0.2968679279}>0.05$$



所以不能拒绝原假设，只能认为该人的看法**成立**。 □

4. 某大学随机调查 120 名男同学，发现有 50 人非常喜欢看武侠小说，而随机调查的 85 名女同学中有 23 人喜欢，用大样本检验方法在 $\alpha=0.05$ 下确认男女同学在喜爱武侠小说方面有无显著差异？并给出检验的 p 值。

解：

使用大样本 u 检验，

$$u=\frac{\frac{50}{120}-\frac{23}{85}}{\sqrt{\frac{50}{120}\left(1-\frac{50}{120}\right)/120+\frac{23}{85}\left(1-\frac{23}{85}\right)/85}}\approx 2.21548089304598$$

$$\boldsymbol{p}=2(1-\Phi(2.21548089304598))\approx\mathbf{0.026728}<0.05$$

所以男女同学在喜爱武侠小说方面**有显著差异**。 □

6. 通常每平方米某种布上的疵点数服从泊松分布，现观测该种布 100 m^2，发现有 126 个疵点，在显著性水平为 0.05 下能否认为该种布每平方米上平均疵点数不超过 1 个？并给出检验的 p 值。

解：

设总体为 $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$，使用大样本检验假设

$$H_0 : \lambda \leqslant 1 \quad \text{vs} \quad H_1 : \lambda > 1$$

由于 $EX = \mathrm{Var}\, X = \lambda$，所以 $u = \frac{\sqrt{100}\left(\frac{126}{100}-1\right)}{\sqrt{\frac{126}{100}}} \approx 2.31626409657434$，$p$ 值为

$$\boldsymbol{p} = 1 - \Phi\left(2.31626409657434\right) \approx \mathbf{0.010272} < 0.05$$

所以拒绝原假设，因此该种布每平方米上平均疵点数**超过 1 个**。 □

9. 有一批电子产品共 50 台，产销双方协商同意找出一个检验方案，使得当次品率 $p \leqslant p_0 = 0.04$ 时拒绝的概率不超过 0.05，而当 $p > p_1 = 0.30$ 时，接受的概率不超过 0.10，请你帮助找出适当的检验方案。

解：

这里的次品率如何定义？是指这 50 台电子产品中次品的频率？还是所有生产的产品的频率？前者的总体是这 50 台电子产品，并且是不放回抽样，那么对应的是超几何分布。后者的总体是所有生产的产品，可以近似看作放回抽样，那么对应的是二项分布。由于生产的电子产品一般不止 50 台，所以这里认为是后者。

设样本为 $x \sim b(n,p)$，由于只有 50 台电子产品用于检验，所以 $n \leqslant 50$，而 p 就是次品率。拒绝域为 $\{x > c\}$，$P(x,n,p) = \mathrm{C}_n^x p^x (1-p)^{n-x}$。所以需要求出 n 和 x 使得

$$\sum_{x=c+1}^{n} \mathrm{C}_n^x 0.04^x (1-0.04)^{n-x} \leqslant 0.05$$

$$\sum_{x=0}^{c} \mathrm{C}_n^x 0.30^x (1-0.30)^{n-x} \leqslant 0.10$$

遍历 n 与 c 所有可能的取值（$n = 1, 2, \cdots, 50$，$c = 0, 1, \cdots, n$）即可找到合适的 n 和 c。

```python
from latex2sympy2 import latex2sympy
from sympy.abc import c, n
import pandas as pd

verify1 = latex2sympy(r"\sum_{x=c+1}^{n} \binom{n}{x}
↪  0.04^{x}(1-0.04)^{n-x} \leqslant 0.05")
verify2 = latex2sympy(r"\sum_{x=0}^{c} \binom{n}{x} 0.30^{x}
↪  (1-0.30)^{n-x} \leqslant 0.10")

result = []
for _n in range(1, 51):
    line = []
    for _c in range(0, _n + 1):
        line.append(verify1.subs({n:_n, c:_c}) and
        ↪  verify2.subs({n:_n, c:_c}))
    for _c in range(_n + 1, 51):
        line.append(False)
    result.append(line)
```

```
    pd.DataFrame(result)
```

观察结果即可发现在所有结果为 True 的位置里，n 最小取 15，对应的 c 为 2，也就是**取出 15 个产品进行检测，次品数大于 2 时就拒绝，否则就接受。**

□

7.4 似然比检验与分布拟合检验

3. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为来自指数分布 $\mathrm{Exp}(\lambda_1)$ 的样本，$y_1, y_2, \cdots, y_m$ 为来自指数分布 $\mathrm{Exp}(\lambda_1)$ 的样本，且两组样本独立，其中 λ_1, λ_2 是未知的正参数。

(1) 求假设 $H_0: \lambda_1 = \lambda_2 \quad \text{vs} \quad H_1: \lambda_1 \neq \lambda_2$ 的似然比检验；

解：

参数空间为 $\Theta_0 = \{(\lambda_1, \lambda_2) | \lambda_1 = \lambda_2 > 0\}$，$\Theta = \{(\lambda_1, \lambda_2) | \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0\}$。最大似然估计为

$$\hat{\lambda_1} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i}, \hat{\lambda_2} = \frac{m}{\sum_{i=1}^m y_i}, \hat{\lambda_0} = \frac{n+m}{\sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^m y_i}$$

所以似然比检验为

$$\Lambda = \frac{\left(\frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i}\right)^n \left(\frac{m}{\sum_{i=1}^m y_i}\right)^m}{\left(\frac{n+m}{\sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^m y_i}\right)^{n+m}}$$

□

(2) 证明上述检验法的拒绝域仅依赖于比值 $\sum_{i=1}^n x_i \Big/ \sum_{i=1}^n y_i$；

证明：

此检验的拒绝域为

$$\{\Lambda \geqslant c\} = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i \Big/ \sum_{i=1}^n y_i \leqslant \cdot \text{或} \sum_{i=1}^n x_i \Big/ \sum_{i=1}^n y_i \geqslant \cdot \right\}$$

这说明仅依赖于比值 $\sum_{i=1}^n x_i \Big/ \sum_{i=1}^n y_i$。 □

(3) 求统计量 $\sum_{i=1}^n x_i \Big/ \sum_{i=1}^n y_i$ 在原假设成立下的分布。

解：

因为 $\sum_{i=1}^{n} x_i \sim \mathrm{Ga}(n,\lambda_1)$, $\sum_{i=1}^{m} y_i \sim \mathrm{Ga}(m,\lambda_2)$，所以在原假设成立下，

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} y_i \sim F(2n,2m)$$

□

4. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的 i.i.d. 样本，其中 μ,σ^2 未知。证明关于假设 $H_0:\mu\leqslant\mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1:\mu>\mu_0$ 的单侧 t 检验是似然比检验（显著性水平 $\alpha<\frac{1}{2}$）。

证明：

似然比统计量为

$$\Lambda=\frac{(2\pi\hat{\sigma})^{-\frac{n}{2}}\exp(-\frac{n}{2})}{(2\pi\hat{\sigma}_0^2)^{-\frac{n}{2}}\exp(-\frac{n}{2})}$$

拒绝域为 $\{\Lambda\geqslant c\}=\left\{\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu_0)}{s}\geqslant t_{1-\alpha}(n-1)\right\}$，这说明似然比检验此时就是单侧 t 检验。

□

6. 掷一颗骰子 60 次，结果如下

点数	1	2	3	4	5	6
次数	7	8	12	11	9	13

试在显著性水平为 0.05 下检验这颗骰子是否均匀。

解：

这是分布拟合优度检验:

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{6}\frac{(n_i-10)^2}{10}=2.8, \quad W=\{\chi^2\geqslant\chi^2_{0.95}(5)=11.0705\}$$

所以不拒绝原假设，即认为这颗骰子均匀。

□

9. 在一批灯泡中抽取 300 只作寿命试验，其结果如下:

寿命（h）	<100	[100,200)	[200,300)	⩾ 300
灯泡数	121	78	43	58

在显著性水平为 0.05 下能否认为灯泡寿命服从指数分布 Exp(0.005)?

解：

也是分布拟合优度检验。题目中寿命分为了四个区间，由于指数分布的累计分布函数为 $e^{-\lambda t}$，所以当 $\lambda = 0.005$ 时这四个区间的的概率 p 以及 np 分别为

$$p = diff([e^{-300\lambda},\ e^{-200\lambda}, e^{-100\lambda}, 1]) \approx [0.2231, 0.1447, 0.2387, 0.3935]$$

$$np = 300 \times [0.2231, 0.1447, 0.2387, 0.3935] \approx [66.93, 43.41, 71.61, 118.05]$$

所以 $\chi^2 = \sum_{axis=0} \frac{(x-np)^2}{np} \approx 1.8393$，拒绝域为 $\{\chi^2 \geqslant \chi^2_{0.995}(3) \approx 7.8147\}$，所以不能拒绝原假设，所以认为灯泡寿命服从指数分布 Exp(0.005)。

□

10. 下表是上海 1875 年到 1955 年的 81 年间，根据其中 63 年观察到的一年中（5 月到 9 月）下暴雨次数的整理资料

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$\geqslant 9$
n_i	4	8	14	19	10	4	2	1	1	0

试检验一年中暴雨次数是否服从泊松分布（$\alpha = 0.05$）。

解：

由于泊松分布的参数的矩估计和最大似然估计是一样的，所以这里只需要计算样本的均值即 $\sum_{i=0}^{9}(n_i \times i)/63 = 2.8571$，即为 $\hat{\lambda}$。

为了满足每一类的样本观测次数不小于 5，需要合并 $i \leqslant 1$ 和 $i \geqslant 5$。

之后计算 $\sum_{k=1}^{5}(n_k - n\hat{p_k})^2/n\hat{p_k} \approx 2.4995$，拒绝域为 $W = \{\chi^2 \geqslant \chi^2_{0.95}(5-1-1) \approx 7.8147\}$，所以不能拒绝原假设，所以可以认为一年中暴雨次数服从泊松分布。

□

12. 设按有无特性 A 与 B 将 n 个样品分成四类，组成 2×2 列联表：

	B	$\bar{B}$	合计
A	a	b	$a+b$
$\bar{A}$	c	d	$c+d$
合计	$a+c$	$b+d$	n

其中 $n = a+b+c+d$，试证明此时列联表独立性检验的 χ^2 统计量可以表示成

$$\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

证明：

对于 a，最大似然估计为 $\frac{(a+c)(a+b)}{n^2}$，同理可以计算其他参数的最大似然估计，所以检验统计量为

$$\chi^2 = \frac{\left(a-\frac{(a+b)(a+c)}{n}\right)^2}{\frac{(a+b)(a+c)}{n}} + \frac{\left(b-\frac{(a+b)(b+d)}{n}\right)^2}{\frac{(a+b)(b+d)}{n}} + \frac{\left(c-\frac{(a+c)(c+d)}{n}\right)^2}{\frac{(a+c)(c+d)}{n}} + \frac{\left(d-\frac{(c+d)(b+d)}{n}\right)^2}{\frac{(c+d)(b+d)}{n}}$$

$$= \frac{\begin{array}{c}(a+b)(a+c)(dn-(b+d)(c+d))^2+(a+b)(b+d)(cn-(a+c)(c+d))^2\\ +(a+c)(c+d)(bn-(a+b)(b+d))^2+(b+d)(c+d)(an-(a+b)(a+c))^2\end{array}}{n(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}$$

$$= \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}$$

□

13. 在研究某种新措施对猪白痢的防治效果问题时，获得了如下数据：

	存活数	死亡数	合计	死亡率
对照	114	36	150	24%
新措施	132	18	150	12%
合计	246	54	300	18%

试问新措施对防治该种疾病是否有显著疗效（$\alpha = 0.05$）?

解：

原假设为新措施对该种疾病无显著疗效。根据第 12 题计算统计量

$$\chi^2 = \frac{300\times(114\times 18-132\times 36)^2}{(114+36)(36+18)(18+132)(132+114)} = \frac{300}{41} \approx 7.31707317073171$$

此时 $r=c=2$，所以 $(r-1)(c-1)=1$，所以 $\chi^2_{0.95}(1)=3.8415$，所以拒绝域为 $\{\chi^2 \geqslant 3.8415\}$，所以拒绝原假设，所以新措施对防治该种疾病有显著疗效。

□