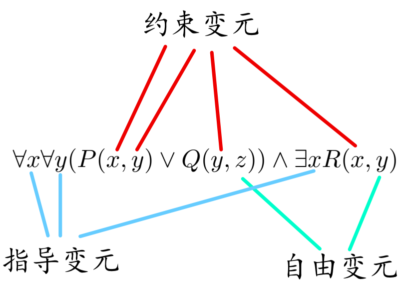
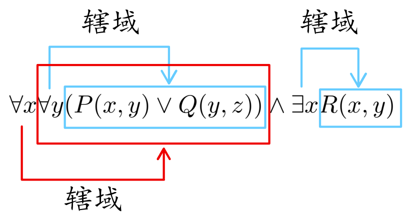
4.2 谓词公式的等值演算和前束范式

1. 指出谓词公式 $\forall x\forall y(P(x,y)\vee Q(y,z))\wedge\exists xR(x,y)$ 的指导变元、量词的辖域、约束变元和自由变元。





2. 求谓词公式 $\forall x\forall y(P(x,y)\leftrightarrow Q(x,y))\rightarrow\exists x\forall yR(x,y)$ 的前束范式。

解：

$$
\begin{aligned}
&\forall x\forall y(P(x,y)\leftrightarrow Q(x,y))\rightarrow\exists x\forall yR(x,y) \\
=&\forall x\forall y(P(x,y)\leftrightarrow Q(x,y))\rightarrow\exists z\forall uR(z,u) && \text{（换名）}\\
=&\neg(\forall x\forall y(P(x,y)\leftrightarrow Q(x,y)))\vee\exists z\forall uR(z,u) && \text{（消去}\rightarrow\text{）}\\
=&\exists x\exists y(\neg(P(x,y)\leftrightarrow Q(x,y)))\vee\exists z\forall uR(z,u) && \text{（内移}\neg\text{）}\\
=&\exists x\exists y\exists z\forall u(\neg(P(x,y)\leftrightarrow Q(x,y))\vee R(z,u)) && \text{（量词前移）}\\
=&\exists x\exists y\exists z\forall u((P(x,y)\leftrightarrow Q(x,y))\rightarrow R(z,u)) && \text{（恢复}\rightarrow\text{（非必要））}
\end{aligned}
$$

□

4.3 一阶逻辑的推理理论

1. 构造 $\forall x(P(x)\vee Q(x)),\forall x(Q(x)\rightarrow\neg R(x)),\forall xR(x)\Rightarrow\forall xP(x)$ 的形式证明。

证明：

设y为任意的个体变量

① $\forall x(P(x)\vee Q(x))$	前提引入
② $P(y)\vee Q(y)$	① US 规则
③ $\forall x(Q(x)\rightarrow\neg R(x))$	前提引入
④ $Q(y)\rightarrow\neg R(y)$	③ US 规则
⑤ $\forall xR(x)$	前提引入
⑥ $R(y)$	⑤ US 规则
⑦ $\neg Q(y)$	④ ⑥ 拒取式
⑧ $P(y)$	② ⑦ 析取三段论
⑨ $\forall xP(x)$	⑧ UG 规则

□

2. 证明下面的推理：
“每个科研工作者都是努力工作的。每个努力工作而又聪明的人都取得事业的成功。某个人是科研工作者并且聪明。所以，某人事业取得成功。”

设$P(x): x$是科研工作者，$Q(x): x$努力工作，$R(x): x$聪明，$S(x): x$取得事业的成功，
e : 某个人，则需要证明：
$\forall x(P(x) \to Q(x)), \forall x(Q(x) \wedge R(x) \to S(x)), P(e) \wedge R(e) \Rightarrow S(e)$

证明：

① $P(e) \wedge R(e)$	前提引入
② $P(e)$	① 化简
③ $R(e)$	① 化简
④ $\forall x(P(x) \to Q(x))$	前提引入
⑤ $P(e) \to Q(e)$	④ US 规则
⑥ $Q(e)$	② ⑤ 假言推理
⑦ $Q(e) \wedge R(e)$	③ ⑥ 合取引入
⑧ $\forall x(Q(x) \wedge R(x) \to S(x))$	前提引入
⑨ $Q(e) \wedge R(e) \to S(e)$	⑧ US 规则
⑩ $S(e)$	⑦ ⑨ 假言推理

□