

第八次作业

第 12 章 异方差时间序列模型

12.3 使用定义 $\eta_t = r_t^2 - \sigma_{t|t-1}^2$ [方程 (12.2.4)] 并证明 $\{\eta_t\}$ 是一个序列不相关过程。同样证明 η_t 与过去的收益率平方是不相关的, 即证明对于 $k > 0$, $\text{Corr}(\eta_t, r_{t-k}^2) = 0$ 。

证明：

已知 $r_t = \sqrt{h_t}\nu_t$, 所以 $\eta_t = r_t^2 - h_t = h_t(\nu_t^2 - 1)$, 且 ν_t 与 $h_t, h_{t-k}, k \geq 1$ 独立, $E(\nu_t^2) = 1$, 所以 $E(\nu_t^2 - 1) = 0$ 。所以 $E(\eta_t) = E\{h_t(\nu_t^2 - 1)\} = E(h_t)E(\nu_t^2 - 1) = 0$ 。

所以 $\text{Cov}(\eta_t, \eta_{t-k}) = E(\eta_t \eta_{t-k}) - E(\eta_t)E(\eta_{t-k}) = E(\eta_t \eta_{t-k}) = E\{h_t(\nu_t^2 - 1)h_{t-k}(\nu_{t-k}^2 - 1)\} = E(\nu_t^2 - 1)E\{h_t h_{t-k}(\nu_{t-k}^2 - 1)\} = 0$, 即 $\{\eta_t\}$ 是一个序列不相关过程。

所以 $\text{Cov}(\eta_t, r_{t-k}^2) = E(\eta_t r_{t-k}^2) - E(\eta_t)E(r_{t-k}^2) = E(\eta_t r_{t-k}^2) = E\{h_t(\nu_t^2 - 1)h_{t-k}\nu_{t-k}^2\} = E(\nu_t^2 - 1)E\{h_t h_{t-k}\nu_{t-k}^2\} = 0$, 所以 $\text{Corr}(\eta_t, r_{t-k}^2) = 0$, 即 η_t 与过去的收益率平方是不相关的。□

12.4 把 $\sigma_{t|t-1}^2 = r_t^2 - \eta_t$ 代入方程 (12.2.2), 推导得到方程 (12.2.5) 的代数运算过程。

解：

方程 (12.2.2) 为 $\sigma_{t|t-1}^2 = \omega + \alpha r_{t-1}^2$, 把 $\sigma_{t|t-1}^2 = r_t^2 - \eta_t$ 代入此方程, 可得 $r_t^2 - \eta_t = \omega + \alpha r_{t-1}^2$, 移项可得 $r_t^2 = \omega + \alpha r_{t-1}^2 + \eta_t$, 即为方程 (12.2.5)。□

12.5 证明方程 (12.2.8)。

证明：

方程 (12.2.8) 为 $\tau = \omega^2 + 2\omega\alpha\sigma^2 + \alpha^2 3\tau$, 其中 $\tau = E(\sigma_{t|t-1}^4)$ 并假设 $\{\sigma_{t|t-1}^4\}$ 平稳。

将方程 (12.2.2) $\sigma_{t|t-1}^2 = \omega + \alpha r_{t-1}^2$ 两边平方后可得：

$$\sigma_{t|t-1}^4 = \omega^2 + 2\omega\alpha r_{t-1}^2 + \alpha^2 r_{t-1}^4$$

两边求期望后可得：

$$E(\sigma_{t|t-1}^4) = \omega^2 + 2\omega\alpha E(r_{t-1}^2) + \alpha^2 E(r_{t-1}^4) \quad (1)$$

由于收益率数列是平稳的, 所以 $E(r_{t-1}) = 0$, 所以 $\sigma^2 = \text{Var}(r_{t-1}^2) = E(r_{t-1}^2) - E^2(r_{t-1}) = E(r_{t-1}^2)$ ②。

再根据方程 (12.2.7) 可知 $E(r_t^4) = 3E(\sigma_{t|t-1}^4)$, 又因为假设 $\{\sigma_{t|t-1}^4\}$ 平稳, 所以 $E(r_{t-1}^4) = 3E(\sigma_{t-1|t-2}^4) = 3E(\sigma_{t|t-1}^4) = 3\tau$ ③。

将②③代入①即可得 $\tau = \omega^2 + 2\omega\alpha\sigma^2 + \alpha^2 3\tau$ 。 □