第五次作业

第 7 章 参数估计

1. 若 AR(1) 的模型改为 $Y_t = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + e_t$，其中 $e_t \sim N(0, \sigma_e^2)$，求 $(\phi_0, \phi_1, \sigma_e^2)$ 的无条件似然函数和极大似然估计需要满足的方程。

解：

$$
\begin{aligned}
L(\phi_0, \phi_1, \sigma_e^2) &= f(y_1, y_2, \cdots, y_n) \\
&= f(y_1) \prod_{t=2}^{n} f(y_t \mid y_{t-1}) \\
&= f(y_1) \prod_{t=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_e^2}} \exp\left[-\frac{(y_t - \phi_0 - \phi_1 y_{t-1}^2)^2}{2\sigma_e^2}\right] \\
&= f(y_1) (2\pi\sigma_e^2)^{-\frac{n-1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_e^2} \sum_{t=2}^{n} (y_t - \phi_0 - \phi_1 y_{t-1})^2\right]
\end{aligned}
$$

其中 $f(y_1) = (2\pi\sigma_e^2)^{-\frac{1}{2}} (1 - \phi_1^2)^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_e^2}(1 - \phi_1^2)(y - \phi_0)^2\right]$，所以 $(\phi_0, \phi_1, \sigma_e^2)$ 的无条件似然函数为

$$
f(y_1, y_2, \cdots, y_n) = (2\pi\sigma_e^2)^{-\frac{n}{2}} (1-\phi_1^2)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_e^2}\left[\sum_{t=2}^{n} (y_t - \phi_0 - \phi_1 y_{t-1})^2 + (1 - \phi_1)^2 (y_1 - \phi_0)^2\right]\right\}
$$

极大似然估计需要满足的方程为

$$
\begin{cases}
\partial \log L(\phi_0, \phi_1, \sigma_e^2) / \partial \phi_0 = 0 \\
\partial \log L(\phi_0, \phi_1, \sigma_e^2) / \partial \phi_1 = 0 \\
\partial \log L(\phi_0, \phi_1, \sigma_e^2) / \partial \sigma_e^2 = 0
\end{cases}
$$

□

2. 对 AR(2) 模型：

$$
Y_t - \mu = \phi_1(Y_{t-1} - \mu) + \phi_2(Y_{t-2} - \mu) + e_t, \quad e_t \sim N(0, \sigma_e^2)
$$

(a) 求给定 (Y_1, Y_2) 时的条件似然函数 $L(\phi_1, \phi_2, \mu, \sigma_e^2 \mid Y_1, Y_2)$，并求条件似然估计 $\phi_1, \phi_2, \mu, \sigma_e^2$ 需要满足的方程

解：

给定 (Y_1, Y_2) 时的条件似然函数 $L(\phi_1, \phi_2, \mu, \sigma_e^2 \mid Y_1, Y_2)$ 为

$$\begin{aligned}
&L(\phi_1, \phi_2, \mu, \sigma_e^2 \mid Y_1, Y_2) \\
=&f(y_1, y_2, \cdots, y_n \mid Y_1, Y_2) \\
=&1_{[Y_1=y_1]}1_{[Y_2=y_2]}\prod_{t=3}^{n} f(y_t \mid y_{t-2}, y_{t-1}) \\
=&1_{[Y_1=y_1]}1_{[Y_2=y_2]}\prod_{t=3}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\sigma_e^2}} \exp\left\{\frac{1}{\sigma_e^2}\sum_{t=3}^{n}\left[y_t - \mu - \phi_1(y_{t-1} - \mu) - \phi_2(y_{t-2} - \mu)\right]^2\right\}
\end{aligned}$$

条件似然估计 $\phi_1, \phi_2, \mu, \sigma_e^2$ 需要满足的方程为

$$\begin{cases}
\partial \log L(\phi_1, \phi_2, \mu, \sigma_e^2 \mid Y_1, Y_2)/\partial \phi_1 = 0 \\
\partial \log L(\phi_1, \phi_2, \mu, \sigma_e^2 \mid Y_1, Y_2)/\partial \phi_2 = 0 \\
\partial \log L(\phi_1, \phi_2, \mu, \sigma_e^2 \mid Y_1, Y_2)/\partial \sigma_e^2 = 0
\end{cases}$$

□

(b) 求无条件似然函数 $L(\phi_1, \phi_2, \mu, \sigma_e^2)$（提示：$(Y_1, Y_2)^{\mathrm{T}}$ 服从二维正态分布），并求无条件似然估计 $\phi_1, \phi_2, \mu, \sigma_e^2$ 需要满足的方程

解：

题目只说 $(Y_1, Y_2)^{\mathrm{T}}$ 服从二维正态分布，未给定参数，所以可以设 $(Y_1, Y_2)^{\mathrm{T}}$ 的概率密度函数为 $f(y_1, y_2)$，因此无条件似然函数为

$$\begin{aligned}
&L(\phi_1, \phi_2, \mu, \sigma_e^2) \\
=&f(y_1, y_2)L(\phi_1, \phi_2, \mu, \sigma_e^2 \mid Y_1, Y_2) \\
=&f(y_1, y_2)1_{[Y_1=y_1]}1_{[Y_2=y_2]}\prod_{t=3}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\sigma_e^2}} \exp\left\{\frac{1}{\sigma_e^2}\sum_{t=3}^{n}\left[y_t - \mu - \phi_1(y_{t-1} - \mu) - \phi_2(y_{t-2} - \mu)\right]^2\right\}
\end{aligned}$$

无条件似然估计 $\phi_1, \phi_2, \mu, \sigma_e^2$ 需要满足的方程为

$$\begin{cases}
\partial \log L(\phi_1, \phi_2, \mu, \sigma_e^2)/\partial \phi_1 = 0 \\
\partial \log L(\phi_1, \phi_2, \mu, \sigma_e^2)/\partial \phi_2 = 0 \\
\partial \log L(\phi_1, \phi_2, \mu, \sigma_e^2)/\partial \mu = 0 \\
\partial \log L(\phi_1, \phi_2, \mu, \sigma_e^2)/\partial \sigma_e^2 = 0
\end{cases}$$

□

3. 若 AR(2) 模型改为 $Y_t = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + e_t$，其中 $e_t \sim N(0, \sigma_e^2)$，求无条件似然函数 $L(\phi_0, \phi_1, \phi_2, \sigma_e^2)$ 以及极大似然估计需要满足的方程。

解：

设 (Y_1, Y_2) 的概率密度函数为 $f(y_1, y_2)$，则无条件似然函数为

$$
\begin{aligned}
L(\phi_0, \phi_1, \phi_2, \sigma_e^2) &= f(y_1, y_2, \cdots, y_n) \\
&= f(y_1, y_2) \prod_{t=3}^{n} f(y_t \mid y_{t-2}, y_{t-1}) \\
&= f(y_1, y_2) \prod_{t=3}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\sigma_e^2}} \exp\left\{ \frac{1}{\sigma_e^2} (y_t - \phi_0 - \phi_1 y_{t-1} - \phi_2 y_{t-2})^2 \right\} \\
&= f(y_1, y_2) \frac{1}{\sqrt{2\sigma_e^2}} \exp\left\{ \frac{1}{\sigma_e^2} \sum_{t=3}^{n} (y_t - \phi_0 - \phi_1 y_{t-1} - \phi_2 y_{t-2})^2 \right\}
\end{aligned}
$$

极大似然估计需要满足的方程为

$$
\begin{cases}
\partial \log L(\phi_0, \phi_1, \phi_2, \sigma_e^2) / \partial \phi_0 = 0 \\
\partial \log L(\phi_0, \phi_1, \phi_2, \sigma_e^2) / \partial \phi_1 = 0 \\
\partial \log L(\phi_0, \phi_1, \phi_2, \sigma_e^2) / \partial \phi_2 = 0 \\
\partial \log L(\phi_0, \phi_1, \phi_2, \sigma_e^2) / \partial \sigma_e^2 = 0
\end{cases}
$$

□

7.17 模拟一个 $\phi = 0.7, \theta = 0.4, n = 72$ 的 ARMA(1,1) 序列。

(a) 求 ϕ 和 θ 的矩估计。

TSA 包中的 `arima` 函数没有矩估计方法，用大模型实现的矩估计方法一直出错，自己又不会改，所以只能放弃了。

(b) 求 ϕ 和 θ 的条件最小二乘估计，并与 **(a)** 比较。

```r
data_arma_11 = arima.sim(list(ar=0.7, ma=0.4), n=72)
arima(data_arma_11, order=c(1,0,1),method = "CSS")
```

```
Call:
arima(x = data_arma_11, order = c(1, 0, 1), method = "CSS")


Coefficients:
         ar1     ma1  intercept
      0.7229  0.3242    -0.4065
s.e.  0.0923  0.1234     0.5606

sigma^2 estimated as 0.9802:  part log likelihood = -101.44
```

(c) 求 ϕ 和 θ 的极大似然估计，并与 (a) 和 (b) 比较。

```
arima(data_arma_11, order=c(1,0,1),method = "ML")
```

```
Call:
arima(x = data_arma_11, order = c(1, 0, 1), method = "ML")

Coefficients:
         ar1    ma1  intercept
      0.7184  0.338    -0.2179
s.e.  0.0960  0.127     0.5357

sigma^2 estimated as 0.9862:  log likelihood = -102.3,  aic = 210.61
```

(d) 在选取相同参数和样本规模的情况下，使用新的模拟序列重复 (a) 、(b) 和 (c) ，并将本次与前次的模拟结果进行比较。

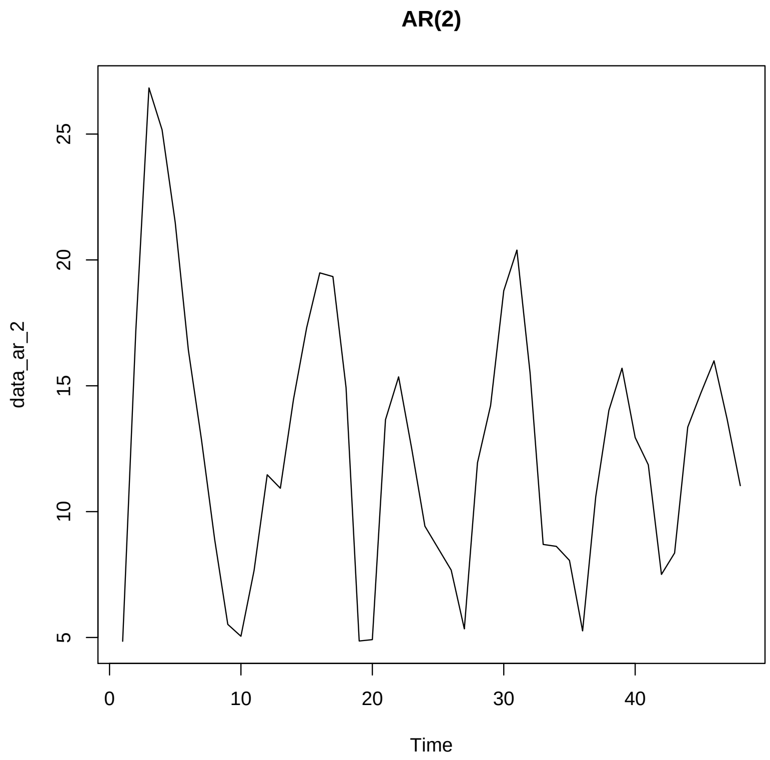
```
data_arma_11 = arima.sim(list(ar=0.7, ma=0.4), n=72)
arima(data_arma_11, order=c(1,0,1),method = "CSS")
arima(data_arma_11, order=c(1,0,1),method = "ML")
```

```
Call:
arima(x = data_arma_11, order = c(1, 0, 1), method = "CSS")

Coefficients:
         ar1     ma1  intercept
      0.5729  0.1459    -0.1612
s.e.  0.1359  0.1641     0.2950

sigma^2 estimated as 0.84:  part log likelihood = -95.89

Call:
arima(x = data_arma_11, order = c(1, 0, 1), method = "ML")

Coefficients:
        ar1     ma1  intercept
      0.600  0.1500    -0.0175
s.e.  0.152  0.1799     0.3120

sigma^2 estimated as 0.8858:  log likelihood = -98.12,  aic = 202.23
```

比较后发现和前次模拟结果差距还是比较大的，原因应该是样本量不是很大。

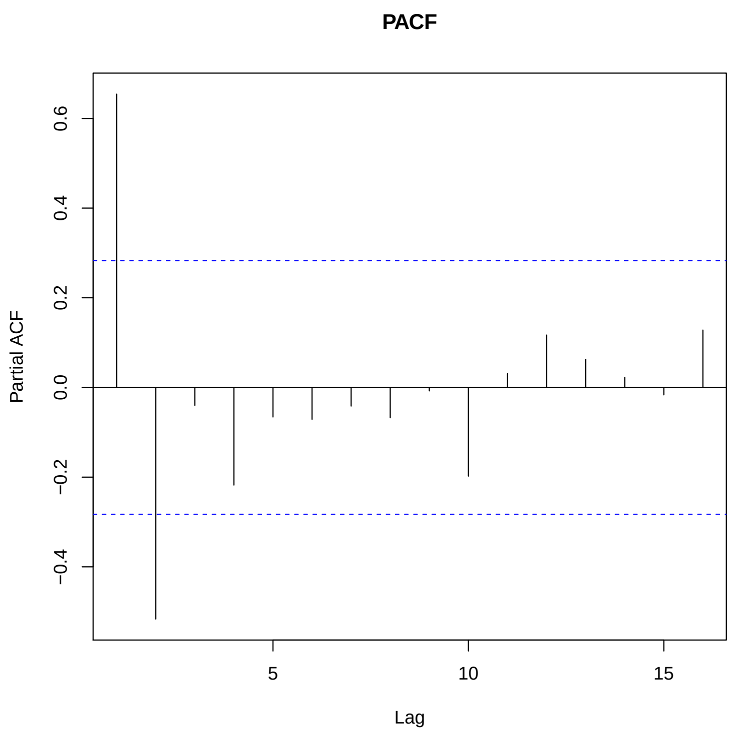
7.24 模拟一个 $\phi_1 = 1.0, \phi_2 = -0.6, n = 48$ 的 AR(2) 序列，但误差项从有 8 个自由度的卡方分布中抽样得到。

```
set.seed(1)
innov <- rchisq(n = 48, df = 8)
data_ar_2 <- arima.sim(list(ar = c(1.0, -0.6)), 48, innov = innov)
plot(data_ar_2)
```



(a) 绘出该序列的样本 PACF，建议建立 AR(2) 模型吗?

```
pacf(data_ar_2, main="PACF")
```



从图中可以看出，$\hat{\Phi}_{11}$ 和 $\hat{\Phi}_{22}$ 都显著超过临界值，其他均未超过临界值，因此建议建立 AR(2) 模型。

(b) 估计 ϕ_1 和 ϕ_2，并解释结果。

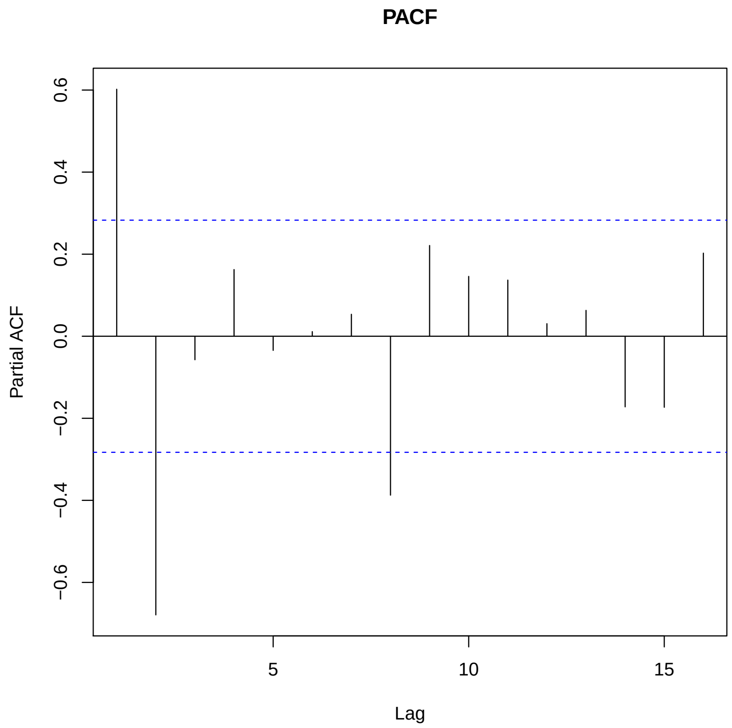
```
arima(data_ar_2, order = c(2, 0, 0), method = "CSS")
```

```
Call:
arima(x = data_ar_2, order = c(2, 0, 0), method = "CSS")

Coefficients:
         ar1      ar2  intercept
      1.1377  -0.6148    12.2435
s.e.  0.0993   0.0970     0.8140

sigma^2 estimated as 7.165:  part log likelihood = -115.37
```

估计出的值为：$\hat{\phi}_1 = 1.1377, \hat{\phi}_2 = -0.6148$，和理论值 $\phi_1 = 1.0, \phi_2 = -0.6$ 比较接近。

(c) 在相同条件下，使用新的模拟序列重复 **(a)** 和 **(b)** 。

```
set.seed(2)
innov <- rchisq(n = 48, df = 8)
data_ar_2 <- arima.sim(list(ar = c(1.0, -0.6)), 48, innov = innov)
pacf(data_ar_2, main="PACF")
arima(data_ar_2, order = c(2, 0, 0), method = "CSS")
```



从图中可以看出，$\hat{\Phi_{11}}$ 和 $\hat{\Phi_{22}}$ 都显著超过临界值，而 $\hat{\Phi_{66}}$ 略微超过临界值，但 6 距离 2 较远，其他均未超过临界值，因此建议建立 AR(2) 模型。

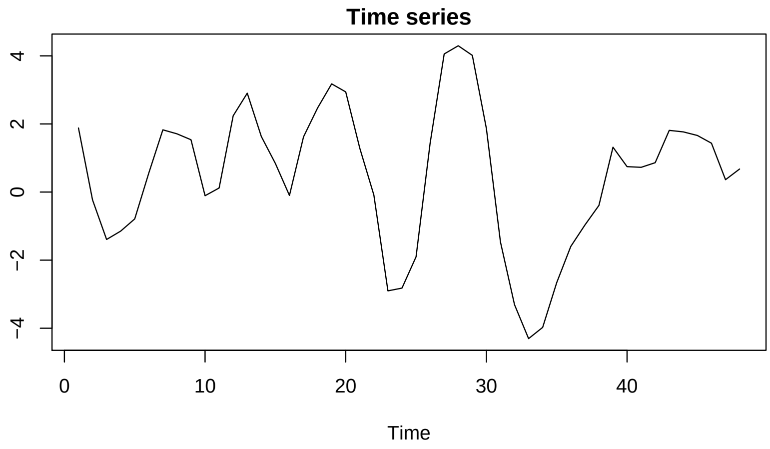
```
Call:
arima(x = data_ar_2, order = c(2, 0, 0), method = "CSS")

Coefficients:
         ar1      ar2  intercept
      1.0322  -0.6947    13.4058
s.e.  0.1031   0.1018     0.9448

sigma^2 estimated as 18.79:  part log likelihood = -138.5
```

估计出的值为：$\hat{\phi}_1 = 1.0322, \hat{\phi}_2 = -0.6947$，和理论值 $\phi_1 = 1.0, \phi_2 = -0.6$ 比较接近。

第 8 章　模型诊断

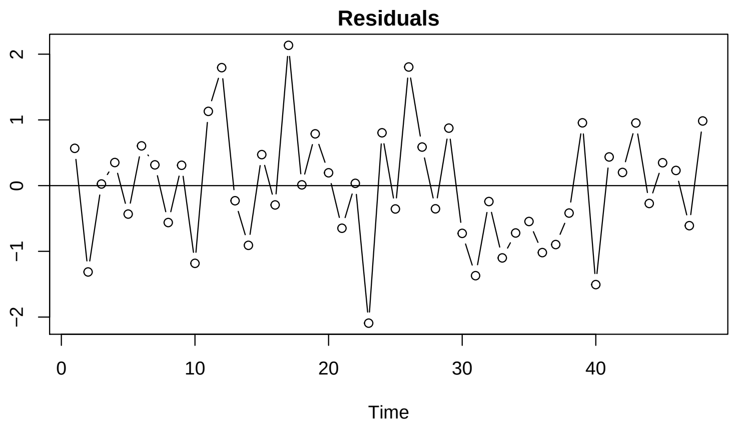
8.6 模拟 $n = 48, \phi_1 = 1.5, \phi_2 = -0.75$ 的 AR(2) 模型。

```r
set.seed(1)
data_ar_2 = arima.sim(list(ar=c(1.5, -0.75)), n = 48)
par(mar=c(20,3,1.5,1.5))
plot(data_ar_2, main = "Time series")
```



(a) 拟合正确识别的 AR(2) 模型，观察残差的时间序列图，该图支持 AR(2) 的识别吗?

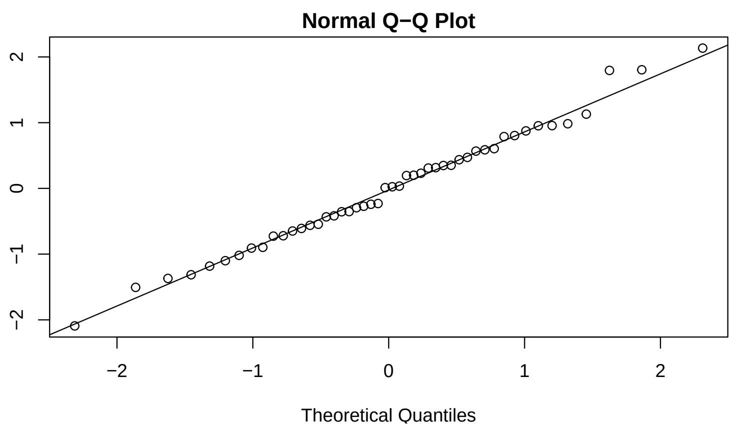
```
model_ar_2 = arima(data_ar_2, order = c(2, 0, 0))
model_ar_2
plot(residuals(model_ar_2), main = "Residuals")
abline(h=0)
```



残差图围绕零水平线，无明显趋势，所以该图支持 AR(2) 的识别。

(b) 展示标准残差的正态分位数-分位数图，该图支持 AR(2) 的识别吗?

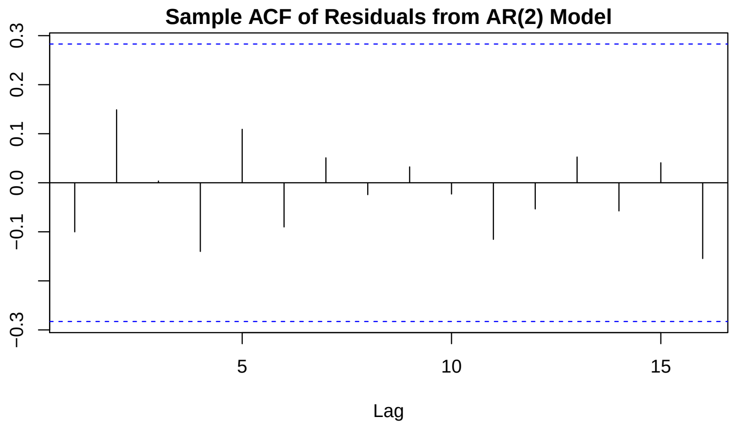
```
qqnorm(residuals(model_ar_2))
qqline(residuals(model_ar_2))
```



图中的点接近一条直线，在极值处也是如此，所以该图支持 AR(2) 的识别。

(c) 展示残差的样本 ACF，该图支持 AR(2) 的识别吗?

```
acf(residuals(model_ar_2), main = "Sample ACF of Residuals from AR(2) Model")
```



残差的自相关系数均未超过临界值，所以可以认为残差没有自相关的迹象，所以该图支持 AR(2) 的识别。

(d) 计算 Ljung-Box 统计量，求和至 $K = 12$，该统计量支持 AR(2) 的识别吗?

```
LB.test(model_ar_2, lag = 12)
```

```
Call:
arima(x = data_ar_2, order = c(2, 0, 0))

Coefficients:
         ar1      ar2  intercept
      1.3426  -0.7001     0.5863
s.e.  0.1007   0.0988     0.3612

sigma^2 estimated as 0.792:  log likelihood = -63.67,  aic = 133.35

^^IBox-Ljung test

data:  residuals from  model_ar_2
X-squared = 5.2, df = 10, p-value = 0.8774

TheRPlugin_ProxyDevice
                     2
```

p 值大于 0.05，所以该统计量支持 AR(2) 的识别。

8.11 图表 6-31 建议对石油价格的对数差分序列识别 AR(1) 模型或 AR(4) 模型(文件名为 oil.price)。

(a) 用极大似然估计法估计两个模型，用本章讨论的诊断检验对结果进行比较。

```
data(oil.price)
model_ar_1 = arima(log(oil.price), order = c(1,1,0), method = "ML")
model_ar_2 = arima(log(oil.price), order = c(4,1,0), method = "ML")
model_ar_1
model_ar_2
tsdiag(model_ar_1)
tsdiag(model_ar_2)
```

估计的结果为：

```
Call:
arima(x = log(oil.price), order = c(1, 1, 0), method = "ML")

Coefficients:
         ar1
      0.2364
s.e.  0.0660

sigma^2 estimated as 0.006787:  log likelihood = 258.55,  aic = -515.11

Call:
arima(x = log(oil.price), order = c(4, 1, 0), method = "ML")

Coefficients:
         ar1      ar2     ar3      ar4
      0.2673  -0.1550  0.0238  -0.0970
s.e.  0.0669   0.0691  0.0691   0.0681

sigma^2 estimated as 0.006603:  log likelihood = 261.82,  aic = -515.64
```

诊断的结果如图 5.1 和 5.2 所示。

(b) 图表 6-32 建议为对数差分序列设定 MA(1) 模型，用极大似然法估计该模型并用本章讨论的检验进行诊断。

```
model_ma_1 = arima(log(oil.price), order = c(0,1,1), method = "ML")
model_ma_1
tsdiag(model_ma_1)
```

```
Call:
arima(x = log(oil.price), order = c(0, 1, 1), method = "ML")

Coefficients:
         ma1
      0.2956
s.e.  0.0693
```

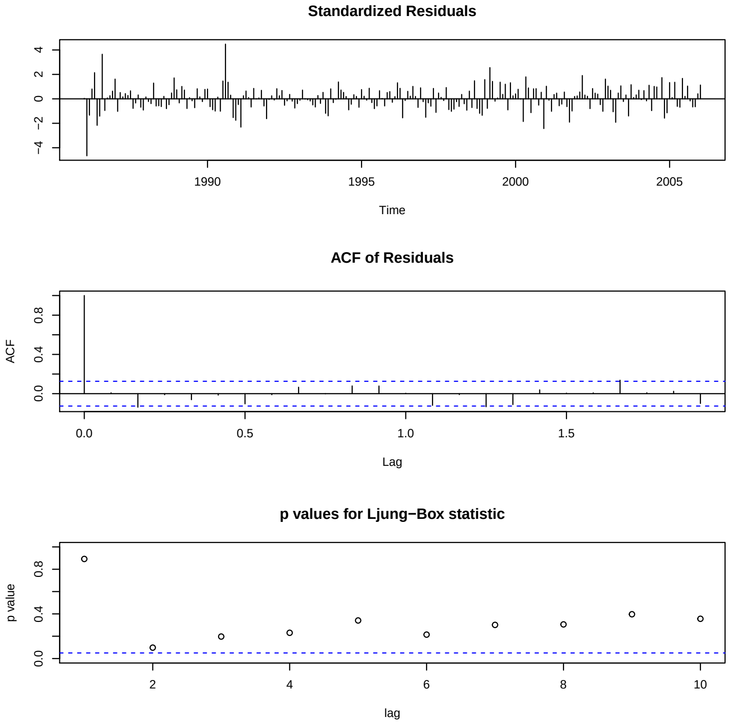


图 5.1: AR(1) 的诊断结果

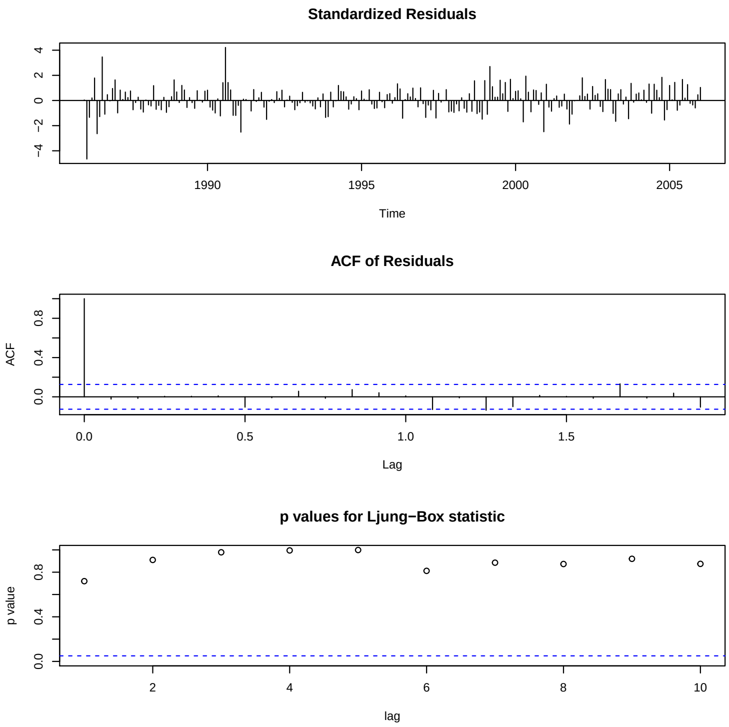


图 5.2: AR(4) 的诊断结果

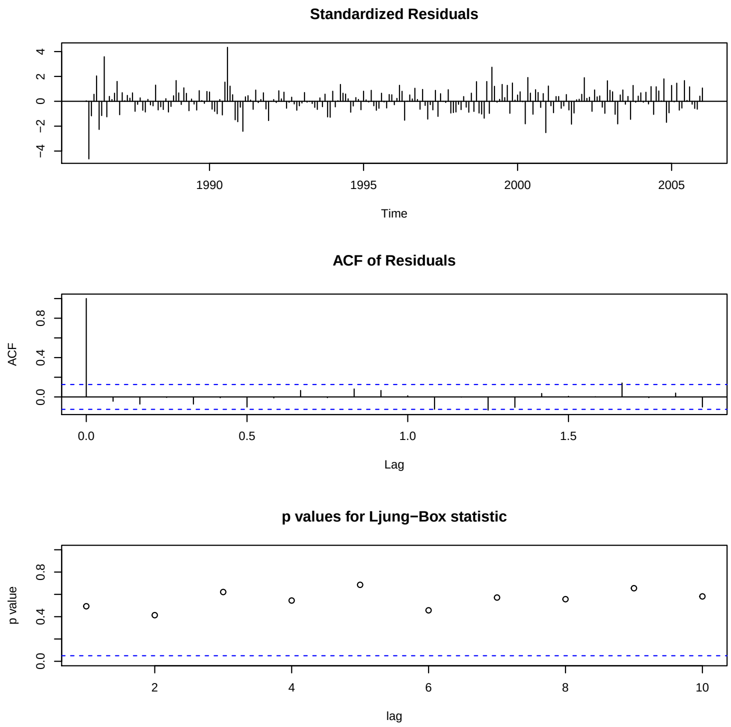


图 5.3: MA(1) 的诊断结果

```
sigma^2 estimated as 0.006689:  log likelihood = 260.29,  aic = -518.58
```

诊断的结果如图 5.3 所示。

(c) 基于 **(a)** 、**(b)** 部分给出的结果，你更偏好 AR(1)、AR(4) 和 MA(1) 三个模型中的哪一个?

由于残差图、残差 ACF 图均无明显区别，而 Ljung-Box 统计量的 p 值均大于 0.05，所以也无法区分。因此根据 AIC 来判断，MA(1) 的 AIC 最小，所以更偏好 MA(1) 模型。