# 第七次作业

## 第 10 章　季节模型

**10.7** 假设过程 $\{Y_t\}$ 满足 $Y_t = Y_{t-4} + e_t$，当 $t = 1, 2, 3, 4$ 时，$Y_t = e_t$。

**(a)** 求 $\{Y_t\}$ 的方差函数。

解：

$Y_t = Y_{t-4} + e_t$，则 $EY_tY_{t-k} = EY_{t-4}Y_{t-k} + Ee_tY_{t-k}$，由于 $e_t$ 与 $Y_{t-k}$ 独立，所以 $Ee_tY_{t-k} = 0$，从而 $EY_tY_{t-k} = EY_{t-4}Y_{t-k}$，即 $\gamma_k = \gamma_{k-4}$。

同时，由于 $\gamma_0 = \sigma_e^2$，$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$，所以 $\{Y_t\}$ 的方差函数为

$$\gamma_t = \begin{cases} \sigma_e^2, & t = 4k, k \in N \\ 0, & t = 4k+1, 4k+2, 4k+3, k \in N \end{cases}$$

□

**(b)** 求 $\{Y_t\}$ 的自相关函数。

解：

由于 $\rho_t = \dfrac{\gamma_t}{\gamma_0}$，所以 $\{Y_t\}$ 的自相关函数为

$$\rho_t = \begin{cases} 1, & t = 4k, k \in N \\ 0, & t = 4k+1, 4k+2, 4k+3, k \in N \end{cases}$$

□

**(c)** 证明 $\{Y_t\}$ 的模型是季节 ARIMA 模型。

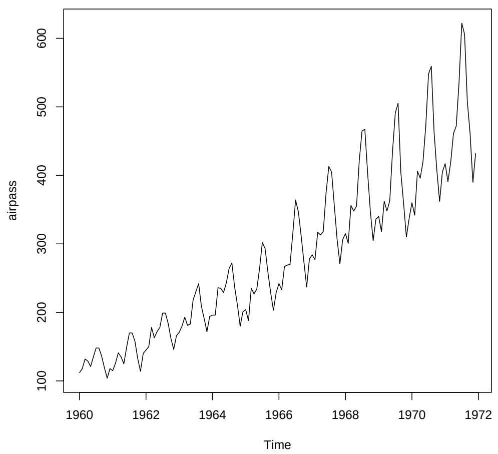
证明：

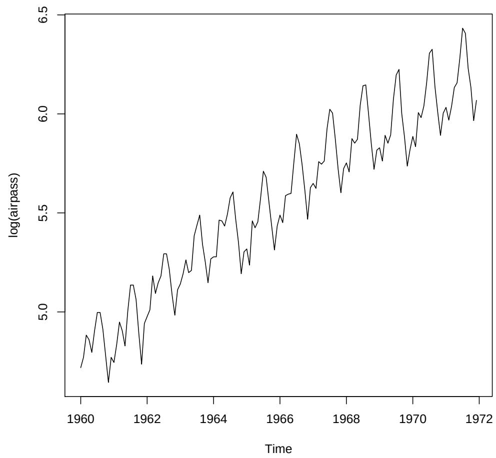
注意到 $\{Y_t\}$ 为 $AR(1)_4$ 的季节 ARIMA 模型。 □

**10.9** 最先由 Box 和 Jenkins(1976) 研究的月航线客运量时间序列被视为典型的时间序列。数据详见文件 airpass。

**(a)** 画出此序列的原始形式和取对数形式的时间序列图。说明对数变换在这里是恰当的。

```r
plot(airpass)
plot(log(airpass))
```

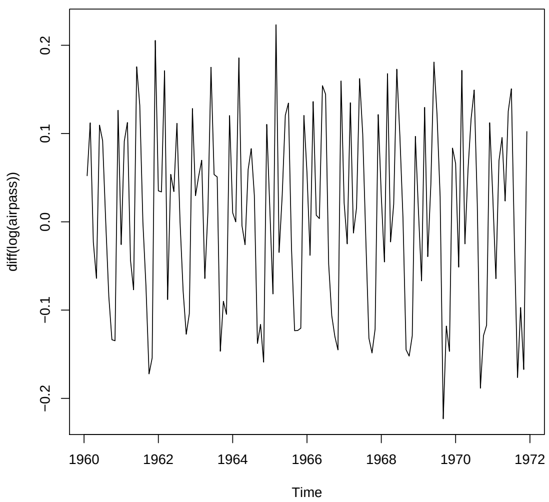



在没对数变换时，每年的变化幅度不同，之前变化幅度少，后来变化幅度大。对数变换后，每年的变化幅度相近了，所以对数变换在这里是恰当的。

**(b)** 画出并解释取对数后序列的一次差分时间序列图。

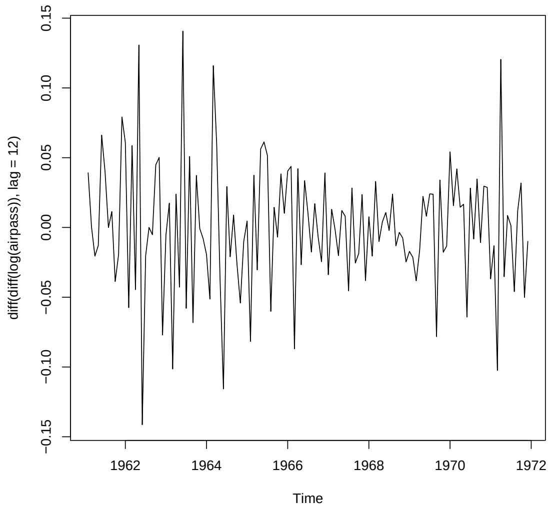
```r
plot(diff(log(airpass)))
```




一次差分后能看到周期性。

**(c)** 画出并解释取对数后序列经一次差分和季节差分后的时间序列图。

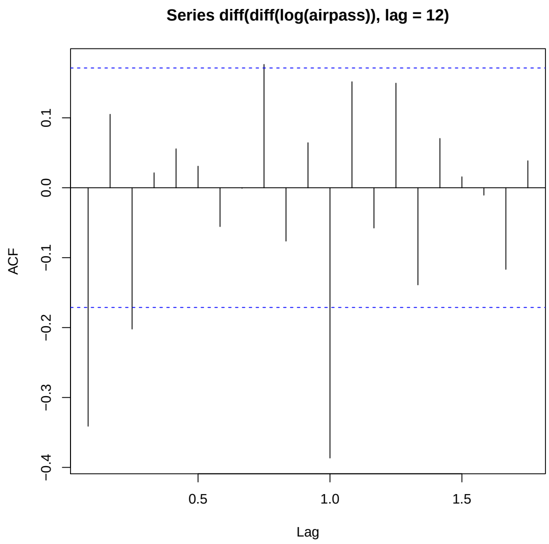
```r
plot(diff(diff(log(airpass)), lag=12))
```




一次差分和季节差分后没有周期性了。

**(d)** 计算并解释取对数后序列经一次差分和季节差分后的样本 ACF。

```
plot(acf(diff(diff(log(airpass)), lag=12)))
```




一次差分和季节差分后的样本 ACF 在 1 阶和 12 阶（图上显示为 1.0）有明显的自相关性，其他位置没有明显的自相关性，在 3 阶和 9 阶上略微超过临界值可以忽略。

**(e)** 用“航线模型”（ARIMA(0,1,1)$\times$(0,1,1)$_{12}$）拟合对数化的序列。

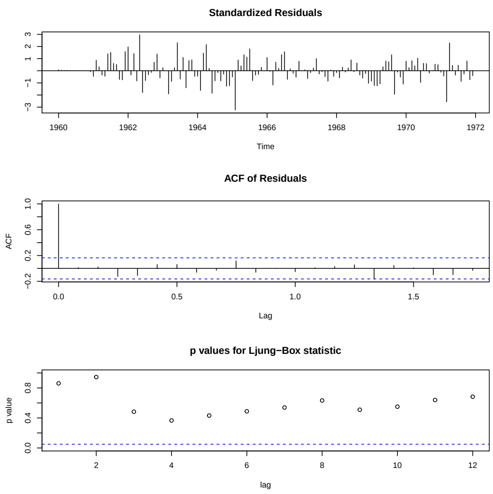
```
model.10.9 <- arima(log(airpass), order=c(0, 1, 1), seasonal = list(order = c(0, 1,
↪  1), period=12))
print(model.10.9)
```

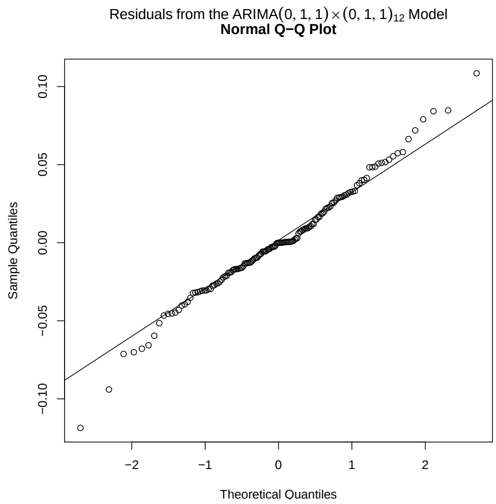
```
Call:
arima(x = log(airpass), order = c(0, 1, 1), seasonal = list(order = c(0, 1,
    1), period = 12))
```

```
Coefficients:
          ma1     sma1
      -0.4018  -0.5569
s.e.   0.0896   0.0731

sigma^2 estimated as 0.001348:  log likelihood = 244.7,  aic = -485.4
```

**(f) 对模型及其自相关性和残差的正态性进行诊断。**

```r
tsdiag(model.10.9, gof.lag = 12)
qqnorm(model.10.9$residuals)
qqline(model.10.9$residuals)
title(expression(Residuals~from~the~ARIMA(list(0,1,1))%*%(list(0,1,1))[12]~Model),line=3)
```



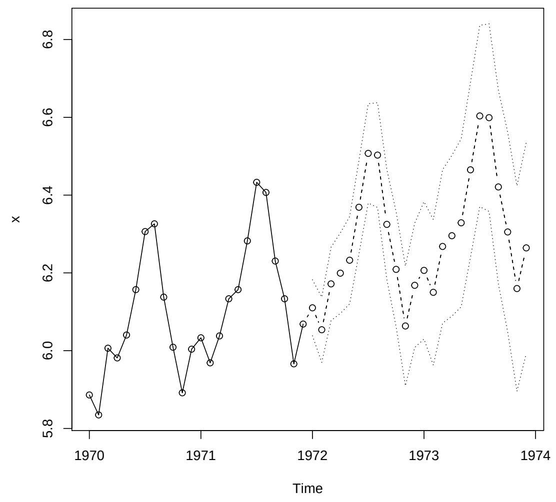

```r
shapiro.test(model.10.9$residuals)
```

```
Shapiro-Wilk normality test

data:  model.10.9$residuals
W = 0.98637, p-value = 0.1674
```

可以看到，残差没有自相关性，同时 p 值为 0.1674，不能拒绝正态性假设，即接受残差是正态分布的假设。

**(g) 假设前置时间为两年，对此序列进行预测，并要求给出预测极限。**

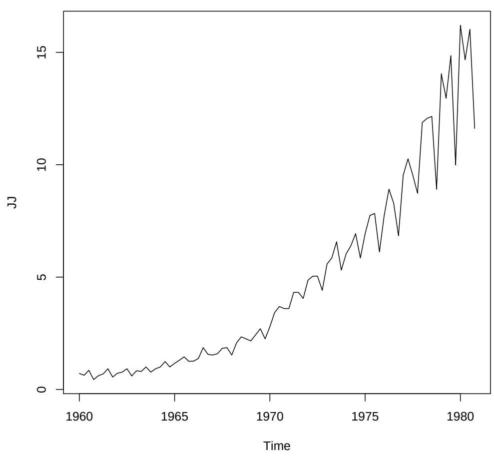
```r
plot(model.10.9, n1 = c(1970, 1), n.ahead = 24)
```

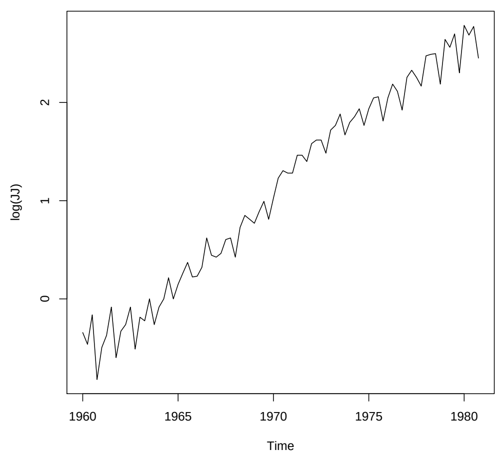



**10.11** 美国 Johnson & Johnson 公司于 1960~1980 年间每股收益的季度数据见于文件 JJ 中。

**(a)** 画出该序列及其取对数后的时间序列图。论证对序列进行对数变换的必要性。

```
plot(JJ)
plot(log(JJ))
```

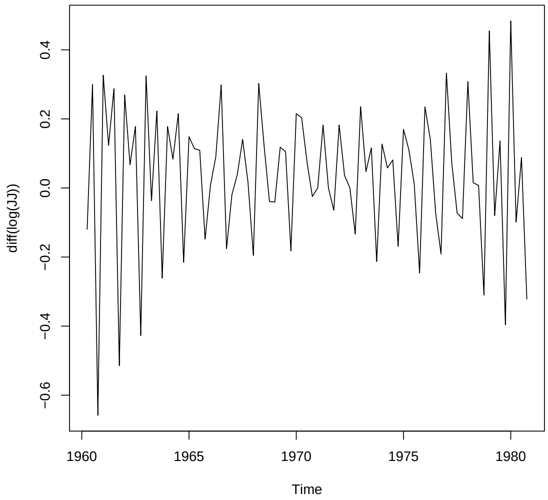



在没对数变换时，每年的变化幅度不同，之前变化幅度少，后来变化幅度大。对数变换后，每年的变化幅度相近了，所以对数变换在这里是恰当的。

**(b)** 序列明显是非平稳的。对其进行一次差分变换并画出序列图。现在序列平稳性有无合理性?

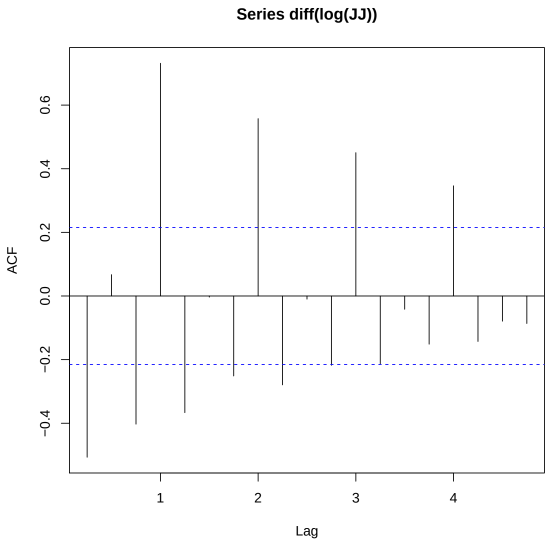
```
plot(diff(log(JJ)))
```




现在序列在前期和后期变化幅度大，中期变化幅度小，因此序列平稳性不具有合理性。

**(c)** 计算并画出经一次差分后序列的样本 ACF，并解释结果。

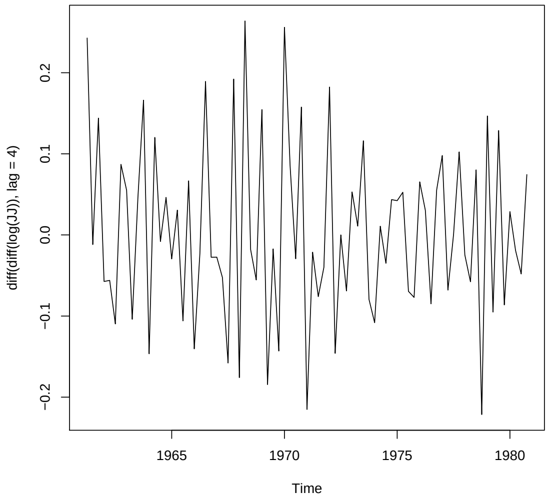
```
plot(acf(diff(log(JJ))))
```




经一次差分后序列的样本 ACF 仍有较大自相关性，因为季节性未被消除。

**(d)** 画出并解释经过一次差分和季节差分后的序列图。牢记季度数据一季的长度为 4.

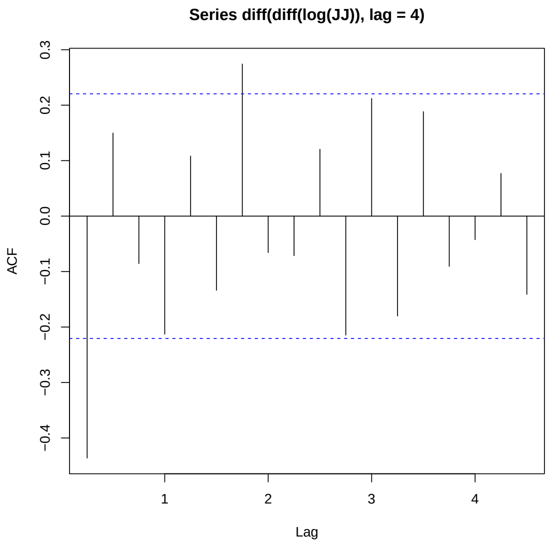
```
plot(diff(diff(log(JJ)), lag=4))
```




可以看到周期性基本消除，并且变化幅度比较接近，所以此时具有平稳性。

**(e)** 画出并说明经过一次差分和季节差分后的序列的样本 ACF。

```
plot(acf(diff(diff(log(JJ)), lag=4)))
```




在 1 阶和 7 阶明显超过临界值。

**(f)** 拟合 ARIMA(0,1,1)×(0,1,1)$_4$ 模型，并评估系数估计值的显著性。

```
model.10.11 <- arima(log(JJ), order=c(0, 1, 1), seasonal = list(order = c(0, 1, 1),
↪   period=4))
print(model.10.11)
```

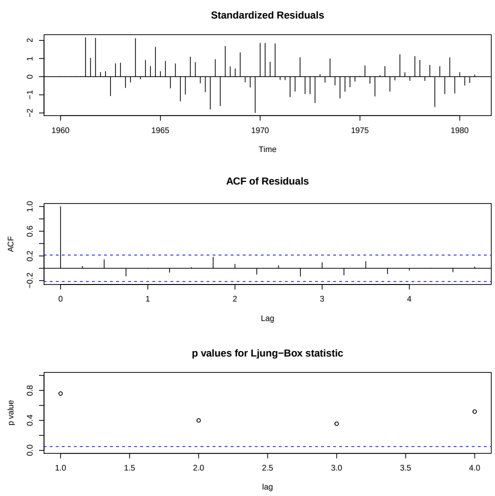
```
Call:
arima(x = log(JJ), order = c(0, 1, 1), seasonal = list(order = c(0, 1, 1), period =
↪   4))

Coefficients:
         ma1     sma1
```

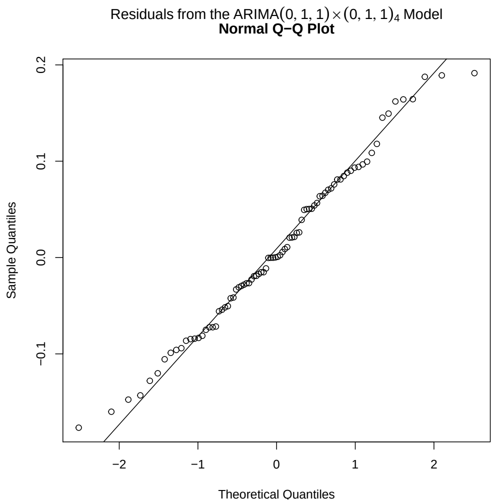
```
      -0.6809  -0.3146
s.e.   0.0982   0.1070

sigma^2 estimated as 0.007931:  log likelihood = 78.38,  aic = -152.75
```

系数估计值较为显著。

## (g) 对残差进行所有的诊断性检验。

```
tsdiag(model.10.11, gof.lag = 4)
qqnorm(model.10.11$residuals)
qqline(model.10.11$residuals)
title(expression(Residuals~from~the~ARIMA(list(0,1,1))%*%(list(0,1,1))[4]~Model),line=3)
```



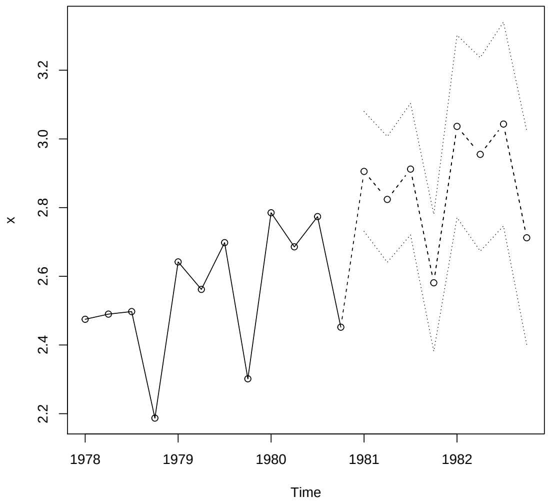

```
shapiro.test(model.10.11$residuals)
```

```
Shapiro-Wilk normality test

data:  model.10.11$residuals
W = 0.98583, p-value = 0.489
```

可以看到残差没有自相关性，并且可以接受残差是正态分布的假设。

## (h) 计算并画出序列未来两年的预测值，要求给出预测极限。

```
plot(model.10.11, n1 = c(1978, 1), n.ahead = 8)
```


3.2
3.0
2.8
2.6
2.4
2.2
x
1978
1979
1980
1981
1982
Time