练习题 4.2

1. 设 $\{(X_n, Y_n)\,;\, n \geqslant 0\}$ 是隐马氏链，其中 $\{X_n\,;\, n \geqslant 0\}$, $\{Y_n\,;\, n \geqslant 0\}$ 分别是状态序列和观察序列，证明对任意 $n \geqslant 0$ $m \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}&P\left(Y_{n+k}=j_{n+k}, 1 \leqslant k \leqslant m \mid X_n=i, Y_l=j_l, 0 \leqslant l \leqslant n\right)\\=&P\left(Y_{n+k}=j_{n+k}, 1 \leqslant k \leqslant m \mid X_n=i\right)\end{aligned}$$

证明：

设状态空间为 S，转移概率矩阵为 (p_{ij})，观测概率矩阵为 (q_{jk})，则

$$\begin{aligned}&P\left(Y_{n+k}=j_{n+k}, 1 \leqslant k \leqslant m \mid X_n=i, Y_l=j_l, 0 \leqslant l \leqslant n\right)\\=&\sum_{x\in S} p_{i,x}^{(k)} q_{x,j_{n+k}}\\=&P\left(Y_{n+k}=j_{n+k}, 1 \leqslant k \leqslant m \mid X_n=i\right)\end{aligned}$$

□

2. 假设例 4.2.1 中产品的质量分为 1（合格）和 0（不合格）。在机器状态为 1 时，产品质量为 0,1 的概率分别为 0.05,0.95，而在机器状态为 2 时，产品质量为 0,1 的概率分别为 0.5,0.5。假设在产品检测的间隔时间内机器状态转移概率为

$$p_{1,1}=0.9,\ p_{1,2}=0.1,\ p_{2,1}=0, p_{2,2}=1$$

若初始机器状态为 1，求第 4 次检测才首次检测到不合格产品的概率并在此条件下计算第 5 次抽到合格品的概率。

解：

设状态序列为 X，观测序列为 Y，则 $Z=(X,Y)$ 构成隐马尔科夫过程，初始状态 $X_0=1$。由题意可得

P	1	2
1	0.9	0.1
2	0	1

Q	0	1
1	0.05	0.95
2	0.5	0.5

π	1	2
P	0.9	0.1

第 4 次检测才首次检测到不合格产品即观测序列为 1110。由于 $p_{2,1}=0$，所以可以直接

不考虑状态序列的 2 后跟着 1 的情况。所以计算的概率如下表所示：

X \ Y	1110
1111	$0.9{\times}0.95\times0.9\times0.95\times0.9\times0.95\times0.9\times0.05=0.028126186875$
1112	$0.9{\times}0.95\times0.9\times0.95\times0.9\times0.95\times0.1\times0.5=0.03125131875$
1122	$0.9{\times}0.95\times0.9\times0.95\times0.1\times0.5\times1\times0.5=0.018275625$
1222	$0.9{\times}0.95\times0.1\times0.5\times1\times0.5\times1\times0.5=0.0106875$
2222	$0.1{\times}0.5\times1\times0.5\times1\times0.5\times1\times0.5=0.00625$
$\sum$	$0.028126186875{+}0.03125131875{+}0.018275625{+}0.0106875{+}0.00625=0.094590630625$

所以第 4 次检测才首次检测到不合格产品的概率为 **0.094590630625**。

在此条件下计算第 5 次抽到合格品的概率，则根据马氏链的性质，先计算

$$P(X_4=1)=0.028126186875$$

$$P(X_4=2)=0.03125131875+0.018275625+0.0106875+0.00625=0.06646444375$$

则从第 4 次开始计算，初始分布变为

π	1	2
P	0.028126186875	0.06646444375

所以可以继续计算第 4 和第 5 步的概率（由于已经确定了 $Y_4=0$，所以不需要乘 $q_{1,0}$ 或 $q_{2,0}$）：

X \ Y	01
11	$0.028126186875{\times}0.9\times0.95=0.024047889778125$
12	$0.028126186875{\times}0.1\times0.5=0.00140630934375$
22	$0.06646444375{\times}1\times0.5=0.033232221875$
$\sum$	$0.024047889778125+0.00140630934375+0.033232221875=0.058686420996875$

所以在此条件下第 5 次抽到合格品的概率为 **0.058686420996875**。 □

4. 在例 4.2.5 设定下，若前 3 天价格波动恰为 $Y_0=1,Y_1=0,Y_2=-1$，求 X_2 的分布，并预测 X_3 最可能的取值。

解：

已知 $Z_n=(X_n,Y_n)$ 为隐马氏链，

P	-1	1
-1	0.75	0.25
1	0.2	0.8

Q	-1	0	1
-1	0.6	0.2	0.2
1	0.2	0.3	0.5

π	-1	1
P	0.2	0.1

将 X_0, X_1, X_2 的取值分情况讨论，得下表：

(a,b,c)	P($X_0 = a, Y_0 = 1, X_1 = b, Y_1 = 0, X_2 = c, Y_2 = -1$)
(1,1,1)	$0.8 \times 0.5 \times 0.8 \times 0.3 \times 0.8 \times 0.2 = 0.01536$
(1,1,-1)	$0.8 \times 0.5 \times 0.8 \times 0.3 \times 0.2 \times 0.6 = 0.01152$
(1,-1,1)	$0.8 \times 0.5 \times 0.2 \times 0.2 \times 0.25 \times 0.2 = 0.0008$
(1,-1,-1)	$0.8 \times 0.5 \times 0.2 \times 0.2 \times 0.75 \times 0.6 = 0.0072$
(-1,1,1)	$0.2 \times 0.2 \times 0.25 \times 0.3 \times 0.8 \times 0.2 = 0.00048$
(-1,1,-1)	$0.2 \times 0.2 \times 0.25 \times 0.3 \times 0.2 \times 0.6 = 0.00036$
(-1,-1,1)	$0.2 \times 0.2 \times 0.75 \times 0.2 \times 0.25 \times 0.2 = 0.0003$
(-1,-1,-1)	$0.2 \times 0.2 \times 0.75 \times 0.2 \times 0.75 \times 0.6 = 0.0027$

将 X_2 的情况提取出来可以计算得

$$P(Y_0 = 1, Y_1 = 0, X_2 = 1, Y_2 = -1) = 0.01536 + 0.0008 + 0.00048 + 0.0003 = 0.01694$$

$$P(Y_0 = 1, Y_1 = 0, X_2 = -1, Y_2 = -1) = 0.01152 + 0.0072 + 0.00036 + 0.0027 = 0.02178$$

所以

$$P(\mathbf{X_2 = 1} | Y_0 = -1, Y_1 = 0, Y_2 = -1) = \frac{P(Y_0 = 1, Y_1 = 0, X_2 = 1, Y_2 = -1)}{P(Y_0 = -1, Y_1 = 0, Y_2 = -1)}$$
$$= \frac{0.01694}{0.01694 + 0.02178} = \mathbf{0.4375}$$

所以 $P(\mathbf{X_2 = -1} | Y_0 = 1, Y_1 = 0, Y_2 = -1) = 1 - 0.4375 = \mathbf{0.5625}$。
即为 X_2 的分布。

令 $P'(\cdot) = P(\cdot | Y_0 = 1, Y_1 = 0, Y_2 = -1)$，则由于 X_n 是马氏链，可得

$$P'(X_3 = 1) = P'(X_2 = 1)p_{1,1} + P'(X_2 = -1)p_{-1,1} = 0.4375 \times 0.8 + 0.5625 \times 0.25 = 0.490625$$

$$P'(X_3 = -1) = P'(X_2 = 1)p_{1,-1}P'(X_2 = -1)p_{-1,-1} = 0.4375 \times 0.2 + 0.5625 \times 0.75 = 0.509375$$

所以 X_3 最可能的取值为 $\mathbf{-1}$。 □