《随机过程》4 月 1 日作业

1. 假设 $N=\{N(t):t\geqslant 0\}$ 是强度为 λ 的 Poisson 过程，且 $T_k=\inf\{t\geqslant 0:N(t)\geqslant k\}(k\in\mathbb{N})$。分别计算条件期望 $E(T_{2024}|N(2024)=2024)$ 和 $E(T_{2025}|N(2024)=2024)$。

解：

由于 $N(2024)=2024\iff T_{2024}\leqslant 2024<T_{2025}$，所以所求的条件期望中只涉及到 T_{2024} 和 T_{2025} 这两个随机变量，因此可以先求 (T_{2024},T_{2025}) 的联合分布。设 (T_{2024},T_{2025}) 的联合概率密度函数为 $p(x,y)$。

由于 $T_{2025}=T_{2024}+W_{2025}$，所以可以先求 (T_{2024},W_{2025}) 的联合概率密度函数。已知 $T_{2024}\sim \mathrm{Ga}(2024,\lambda),W_{2025}\sim \mathrm{Exp}(\lambda)$，且 T_{2024} 与 W_{2025} 相互独立，因此

$$p_{(T_{2024},W_{2025})}(u,v)=\frac{\lambda^{2024}}{\Gamma(2024)}u^{2024-1}e^{-\lambda u}\cdot\lambda e^{-\lambda v}=\frac{\lambda^{2025}u^{2023}e^{-\lambda(u+v)}}{\Gamma(2024)}$$

由于 $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=1$，所以

$$p(x,y)=p_{(T_{2024},T_{2025})}(x,y)=p_{(T_{2024},W_{2025})}(x,y-x)=\frac{\lambda^{2025}x^{2023}e^{-\lambda y}}{\Gamma(2024)}$$

所以

$$\begin{aligned}E(T_{2024}|N(2024)=2024)&=E(T_{2024}|T_{2024}\leqslant 2024<T_{2025})\\&=\iint\limits_{(-\infty,2024]\times[2024,+\infty)}xp(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_{-\infty}^{2024}\int_{2024}^{+\infty}\frac{\lambda^{2025}x^{2024}e^{-\lambda y}}{\Gamma(2024)}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\&=\frac{\lambda^{2025}}{\Gamma(2024)}\int_{-\infty}^{2024}x^{2024}\mathrm{d}x\int_{2024}^{+\infty}e^{-\lambda y}\mathrm{d}y\end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned}E(T_{2025}|N(2024)=2024)&=\iint\limits_{(-\infty,2024]\times[2024,+\infty)}yp(x,y)\mathrm{d}\mathrm{d}\mathrm{d}y\\&=\frac{\lambda^{2025}}{\Gamma(2024)}\int_{-\infty}^{2024}x^{2023}\mathrm{d}x\int_{2024}^{+\infty}ye^{-\lambda y}\mathrm{d}y\end{aligned}$$

计算到这里实在计算不下去了。 □

2. 考虑一个从底层起动（不是启动?）上升的电梯。以 N_i 记在第 i 层进入电梯的人数。假定各 N_i 相互独立，且 $N_i\sim \mathrm{Poi}(\lambda_i)(\forall i)$。在第 i 层进入电梯的各个人相互独立地以概率 p_{ij} 在第 j 层 $(j>i)$ 离开电梯，$\sum\limits_{j>i}p_{ij}=1$。用 O_j 表示在第 j 层离开电梯的人数。求 O_j 的分布列。

解：

在第 i 层进入电梯的人数为 N_i 且各个人相互独立地一概率 p_{ij} 在第 j 层 $(j>i)$ 离开电梯，因此在第 j 层离开电梯的人数的期望为 $\sum_{i=1}^{j} N_i p_{ij} = O_j$

根据泊松过程的性质，$N_i p_{ij} \sim \mathrm{Poi}(\lambda_i p_{ij})$，$\sum_{i=1}^{j} N_i p_{ij} = O_j \sim \mathrm{Poi}\left(\sum_{i=1}^{j} \lambda_i p_{ij}\right)$。

所以 O_j 的分布列为

$$P(O_j = k) = \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{j} \lambda_i p_{ij}}}{k!} e^{-\sum_{i=1}^{j} \lambda_i p_{ij}}$$

□

3. (冲击模型) 记 $X(t)$ 为某系统截至时刻 t 受到的冲击次数。$X = \{X(t) : t \geqslant 0\}$ 是强度为 λ 的 Poisson 过程。设 Y_k 为第 k 次冲击对系统的损害值，满足 $Y_1, Y_2, \cdots \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathrm{Exp}(\mu)$。以 $Z(t)$ 记截至时刻 t 系统所受到的总损害值。当总损害超过一定的指标 α 时系统不能运行下去，寿命终止。记 T 为系统寿命，求 $E(T)$。

解：

由于泊松过程本身和它的停时有良好的互转关系，所以可以按照如下方式转化原问题：注意到此问题中有三个指标：时刻、冲击次数、损害值，于是

设 A_k 表示第 k 次冲击后系统所受到的总损害值，由于 $Y_1, Y_2, \cdots \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathrm{Exp}(\mu)$，则

$$A_k = \sum_{i=1}^{k} Y_k \sim \mathrm{Ga}(k, \mu)$$

与之对应，设 $B(x)$ 表示总损害值为 x 时受到的冲击次数，则

$$B(x) \sim \mathrm{Poi}(\mu)$$

再设 C_k 表示冲击次数为 k 时的时刻，由于 $X(t) \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$，所以

$$C_k \sim \mathrm{Ga}(k, \lambda)$$

所以所求的 $E(T)$ 可以表述为总损害值为 α 时对应的冲击次数对应的时刻，使用重期望公式可得

$$E(T) = E(C_{B(\alpha)}) = E(E(C_{B(\alpha)} | B(\alpha)))$$

由于 $E(C_{B(\alpha)} | B(\alpha) = k) = E(C_k) = \frac{k}{\lambda}$，所以

$$E(T) = E\left(\frac{B(\alpha)}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda} E(B(\alpha)) = \frac{\alpha\mu}{\lambda}$$

□

4. 考虑速率函数为 $\lambda(t) > 0 (\forall t \geqslant 0)$ 的非齐次 Poisson 过程 $X = \{X(t) : t \geqslant 0\}$。令

$$m(t) = \int_0^t \lambda(u) \mathrm{d}u \qquad (t \geqslant 0),$$

$m(t)$ 的反函数记为 $l(t)$。对 $t \geqslant 0$，记 $Y(t) = X(l(t))$。证明 $Y = \{Y(t) : t \geqslant 0\}$ 是经典 Poisson 过程，并求它的强度。

解：

由题意可知 $X(t)\sim\text{Poi}(m(t))$，又知 $m(t)$ 和 $l(t)$ 互为反函数，所以

$$Y(t)=X(l(t))\sim\text{Poi}(m(l(t)))=\text{Poi}(t)$$

所以 $T=\{Y(t)\ :\ t\geqslant 0\}$ 是经典 Poisson 过程，它的强度为 1。 □

5. 重复地抛掷一枚均匀硬币，抛掷结果为 $Y_0,Y_1,Y_2,\cdots$，它们取值为 1（表示正面）或 0（表示反面）的概率均为 $\frac{1}{2}$。用 $X_n=Y_{n-1}+Y_n$ 表示第 $n-1$ 次和第 n 次抛掷出正面的总次数 ($n\geqslant 1$)。问 $X=\{X_n\ :\ n\in\mathbb{Z}^+\}$ 是否是马氏链？并说明理由。

解：

$\forall n\in\mathbb{Z}^+,\forall i_1,\cdots,i_{n-1},i,j\in S=\{0,1\}$,

$$\begin{aligned}&P(X_{n+1}=j|X_n=i,X_{n-1}=i_{n-1},\cdots,X_1=i_1)\\=&P(Y_n+Y_{n+1}=j|Y_{n-1}+Y_n=i,\cdots,Y_0+Y_1=i_1)\end{aligned}$$

因为 $Y_0,Y_1,Y_2,\cdots$ 相互独立，所以条件概率中与 Y_n 和 Y_{n+1} 无关的条件都可以不考虑，即

$$\text{上式}=P(Y_n+Y_{n+1}=j|Y_{n-1}+Y_n=i)=P(X_{n+1}=j|X_n=i)$$

所以 $X=\{X_n\ :\ n\in\mathbb{Z}^+\}$ 是马氏链。 □

6. 一个出租车司机在机场、宾馆 A、宾馆 B 之间按照如下方式行车: 如果他在机场, 那么下一时刻他将以等概率到达两个宾馆中的任意一个; 如果他在其中一个宾馆, 那么下一时刻他将以概率 3/4 返回到机场, 而以概率 1/4 开往另一个宾馆. 假设在时刻 0 时司机在机场, 求在时刻 3 时他在宾馆 A 的概率。

解：

设机场、宾馆 A、宾馆 B 分别用 0、1、2 表示，设一步转移概率矩阵为 A，则

$$A=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{3}{4}&0&\frac{1}{4}\\\frac{3}{4}&\frac{1}{4}&0\end{bmatrix}\qquad A^3=\begin{bmatrix}\frac{3}{16}&\frac{13}{32}&\frac{13}{32}\\\frac{39}{64}&\frac{3}{16}&\frac{13}{64}\\\frac{39}{64}&\frac{13}{64}&\frac{3}{16}\end{bmatrix}$$

所求的概率为经过 3 个时刻（时间齐次）从机场到宾馆 A 的概率，即 $\dfrac{13}{32}=0.40625$。 □

7. (天气链) 已知当昨天和前天都晴天时，今天将下雨的概率是 0.3；而当昨天和前天中至少有一天下雨时，今天将下雨的概率是 0.6。用 W_n 表示第 n 天的天气，它取值为 R（表示下雨）或 S（表示晴天）。尽管 $W=\{W_n\ :\ n\in\mathbb{N}\}$ 不是一个马氏链，但由 $X_n=(W_{n-1},W_n)$ 定义的 $X=\{X_n\ :\ n\in\mathbb{Z}^+\}$ 是一个时齐马氏链，其状态空间为 $\{RR,RS,SR,SS\}$。

(1) 写出 X 的一步转移概率矩阵。

解：

昨天今天 \ 今天明天	RR	RS	SR	SS
RR	0.6	0.4	0	0
RS	0	0	0.6	0.4
SR	0.6	0.4	0	0
SS	0	0	0.3	0.7

所以 X 的一步转移概率矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.4 \\ 0.6 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$$

□

(2) 求当给定某周的周一和周二都晴天的条件下，该周周四下雨的概率。

解：

题意也就是经过两步从 SS 转移到 RR 或 SR 的概率，

$$\begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.4 \\ 0.6 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0.36 & 0.24 & 0.24 & 0.16 \\ 0.36 & 0.24 & 0.12 & 0.28 \\ 0.36 & 0.24 & 0.24 & 0.16 \\ 0.18 & 0.12 & 0.21 & 0.49 \end{bmatrix}$$

所以该周周四下雨的概率为 $0.18 + 0.21 = 0.39$。 □

8. (信号传递之“愚人节说谎版”) 设在愚人节这天, 姚老师以 40% 的可能性把“下周的课考试”的消息 (以 60% 的可能性把“下周的课不考试”的消息) 传给路上偶遇的陈雨杭同学, 之后的每位同学 (从陈雨杭开始) 逐次以 70% 的可能性把刚听到的消息 (以 30% 的可能性把刚听到的消息的对立面) 传给遇到的下一位同学 (每次只传给一位同学). 假设第 20 位收到消息的是曾凡晔同学.

(1) 计算条件概率

$$P(\text{姚老师一开始说“下周的课考试”} \mid \text{曾凡晔收到“下周的课考试”的消息}).$$

解：

初始 \ 传出	考试	不考试
未知	0.4	0.6

收到 \ 传出	考试	不考试
考试	0.7	0.3
不考试	0.3	0.7

表 3.1: 左：第一次消息传递；右：后续消息传递

根据贝叶斯公式，

$$P(\text{姚老师一开始说“下周的课考试”} \mid \text{曾凡晔收到“下周的课考试”的消息}) = \frac{P(\text{曾凡晔收到“下周的课考试”的消息}| \text{姚老师一开始说“下周的课考试”}) \times P(\text{姚老师一开始说“下周的课考试”})}{P(\text{曾凡晔收到“下周的课考试”的消息})}$$

从第 1 位同学到第 20 位同学，经过了 19 次信号传递，所以 19 步概率转移矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}^{19} = \begin{bmatrix} 0.500000013743895 & 0.499999986256105 \\ 0.499999986256105 & 0.500000013743895 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

所以

$$P(\text{曾凡晔收到“下周的课考试”的消息}| \text{姚老师一开始说“下周的课考试”}) = 0.5$$

$$P(\text{曾凡晔收到“下周的课考试”的消息}) = 0.4 \times 0.5 + 0.6 \times 0.5 = 0.5$$

所以

$$P(\text{姚老师一开始说“下周的课考试”} \mid \text{曾凡晔收到“下周的课考试”的消息}) = \frac{0.5 \times 0.4}{0.5} = 0.4000$$

□

(2) 又设在上述传递消息的过程中, 第 10 位收到消息的是李墨涵同学, 计算条件概率

$P(\text{姚老师一开始说“下周的课考试”} \mid \text{上述三位同学全都传出“下周的课考试”的消息})$.

解：

设 A_i 表示事件“第 i 位同学传出‘下周的课考试’的消息”，A_0 表示事件“姚老师一开始说‘下周的课考试’”，再根据贝叶斯公式和条件概率的性质，则所求的问题可转换为

$$\begin{aligned} P(A_0|A_1, A_{10}, A_{20}) &= \frac{P(A_1, A_{10}, A_{20}|A_0) \times P(A_0)}{P(A_1, A_{10}, A_{20})} \\ &= \frac{P(A_{20}|A_{10}, A_1, A_0)P(A_{10}|A_1, A_0)P(A_1|A_0)P(A_0)}{P(A_{20}|A_{10}, A_1)P(A_{10}|A_1)P(A_1)} \end{aligned}$$

显然此模型是马氏链，所以根据马氏链的性质，

$$
\begin{aligned}
\text{上式} &= \frac{P(A_{20}|A_{10})P(A_{10}|A_1)P(A_1|A_0)P(A_0)}{P(A_{20}|A_{10})P(A_{10}|A_1)P(A_1)} \\
&= \frac{P(A_1|A_0)P(A_0)}{P(A_1)} \qquad (= P(A_0|A_1)) \\
&= \frac{0.7 \times 0.4}{0.4 \times 0.7 + 0.6 \times 0.3} \\
&= \frac{14}{23} \approx 0.6087
\end{aligned}
$$

□

(要求答案均保留四位有效数字. 提示: 方阵的幂可用数学软件如 Matlab 计算.)