布朗运动及其分布

练习题 6.1

（若无特别说明，以下总设 $B=\{B(t)\,;\,t\geqslant 0\}$ 为标准布朗运动。）

2. 对任意 $0<s<t$，求 $B(s)+B(t)$ 的概率密度函数。

解：

首先，$B(s)$ 与 $B(t)$ 不独立，所以需要进行变换，$B(s)+B(t)=2B(s)+B(t)-B(s)$，而 $B(s)$ 与 $B(t)-B(s)$ 是独立的，且 $B(s)\sim N(0,s)$, $B(t)-B(s)\sim N(0,t-s)$，所以

$$B(s)+B(t)=2B(s)+(B(t)-B(s))\sim N(0,4s+t-s)=N(0,3s+t)$$

所以 $B(s)+B(t)$ 的概率密度函数为

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(3s+t)}}e^{-\frac{x^2}{3s+t}}$$

□

3. 在例 6.1.9 假设下，（例 6.1.9：记 $\mu=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$, $\mathrm{D}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&4&2\\1&2&9\end{pmatrix}$，$(X_1,X_2,X_3)\sim N(\mu,\mathrm{D})$）

(1) 求 $X_2=2$ 时 (X_1,X_3) 的条件联合分布；

交换 X_2 与 X_3 的位置，$(X_1,X_3,X_2)\sim N\left(\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1&1\\1&9&2\\1&2&4\end{bmatrix}\right)$，则 $\tilde{\mu}=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix},v=2,$ $A=\begin{bmatrix}1&1\\1&9\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},C=4,$

$$\begin{aligned}(X_1,X_3)\sim&N(\tilde{\mu}+BC^{-1}(2-v),A-BC^{-1}B^{\mathrm{T}})\\&=N\left(\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\1&9\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&2\end{bmatrix}\right)=N\left(\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0.75&0.5\\0.5&8.0\end{bmatrix}\right)\end{aligned}$$

(2) 求 $X_2=2,X_3=3$ 时 X_1 的条件分布。

$$\tilde{\mu}=1,\bar{y}=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix},v=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix},A=1,B=\begin{bmatrix}1&1\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}9&2\\2&4\end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}X_1\sim&N\left(\tilde{\mu}+BC^{-1}(\bar{y}-v),A-BC^{-1}B^{\mathrm{T}}\right)\\&=N\left(1,1-\begin{bmatrix}1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9&2\\2&4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)=N\left(1,\frac{23}{32}\right)\end{aligned}$$

4. 已知 $B(1)=x$，对任意 $0\leqslant s_1<s_2\leqslant s_3<s_4\leqslant 1$，证明

(1) $E((B(s_4)-B(s_3))(B(s_2)-B(s_1)))=(s_4-s_3)(s_2-s_1)(x^2-1)$,

证明：

$$\begin{aligned}
&E((B(s_4)-B(s_3))(B(s_2)-B(s_1)))\\
&=\operatorname{Cov}(B(s_4)-B(s_3),B(s_2)-B(s_1))+E(B(s_4)-B(s_3))\cdot E(B(s_2)-B(s_1))\\
&=\operatorname{Cov}(B(s_4),B(s_2))-\operatorname{Cov}(B(s_4),B(s_1))-\operatorname{Cov}(B(s_3),B(s_2))+\operatorname{Cov}(B(s_3),B(s_1))\\
&+(E(B(s_4))-E(B(s_3)))(E(B(s_2))-E(B(s_1)))
\end{aligned}$$

根据推论 6.1.10，当 $i<j$ 时，$\operatorname{Cov}(B(s_i),B(s_j))=s_i-s_is_j$，$E(B(s_i))=s_ix$，所以

$$\begin{aligned}
&\text{上式}=s_2-s_2s_4-s_1+s_1s_4-s_2+s_2s_3+s_1-s_1s_3+(s_4x-s_3x)(s_2x-s_1x)\\
&=-s_1s_3+s_1s_4+s_2s_3-s_2s_4+x^2(s_1-s_2)(s_3-s_4)\\
&=(s_4-s_3)(s_1-s_2)(x^2-1)
\end{aligned}$$

□

(2) $E\left[(B(s_4)-B(s_1))^2\right]=(s_4-s_1)+(s_4-s_1)^2(x^2-1)$。

证明：

仍然根据推论 6.1.10，

$$\begin{aligned}
&E\left[(B(s_4)-B(s_1))^2\right]=\operatorname{Var}[B(s_4)-B(s_1)]+[E(B(s_4)-B(s_1))]^2\\
&=\operatorname{Var}[B(s_4)]+\operatorname{Var}[B(s_1)]-2\operatorname{Cov}(B(s_4),B(s_1))+[E(B(s_4))-E(B(s_1))]^2\\
&=s_4-s_4^2+s_1-s_1^2-2(s_1+s_1s_4)+(s_4x-s_1x)^2\\
&=s_4-s_1+2s_1s_4-s_1^2-s_4^2+x^2(s_4-s_1)\\
&=(s_4-s_1)+(s_4-s_1)(x^2-1)
\end{aligned}$$

□

5. 设 B 是方差参数 $\sigma^2=3$ 的布朗运动，已知 $B(1)=1,B(4)=4$，求 $E(B(2)B(3))$ 和 $E(B(3)B(5))$。

解：

由于 $(B(1),B(2),B(3),B(4),B(5))\sim N(\overrightarrow{0},(i\wedge j)_{i,j=1,2,3,4})$，所以

$$(B(2),B(3),B(5),B(1),B(4))\sim N\left(\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix},3\begin{bmatrix}2&2&2&1&2\\2&3&3&1&3\\2&3&5&1&4\\1&1&1&1&1\\2&3&4&1&4\end{bmatrix}\right)$$

由于 $B(1)=1, B(4)=4$，所以

$$
\begin{aligned}
(B(2),B(3)) \sim & N(\tilde{\mu}+BC^{-1}(\bar{y}-v), A-BC^{-1}B^{\mathrm{T}}) \\
&= N\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&2\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&4\end{bmatrix}^{-1}\left(\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right), 3\left(\begin{bmatrix}2&2\\2&3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&2\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&2\\1&3\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\right)\right) \\
&= N\left(\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}\right)
\end{aligned}
$$

所以

$$
\boldsymbol{E(B(2)B(3))} = \mathrm{Cov}(B(2),B(3)) + E(B(2))E(B(3)) = 1+2\times 3 \boldsymbol{= 7}
$$

同理，

$$
\begin{aligned}
(B(3),B(5)) \sim & N(\tilde{\mu}+BC^{-1}(\bar{y}-v), A-BC^{-1}B^{\mathrm{T}}) \\
&= N\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&3\\1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&4\end{bmatrix}^{-1}\left(\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right), 3\left(\begin{bmatrix}3&3\\3&5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&3\\1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&1\\3&4\end{bmatrix}\right)\right) \\
&= N\left(\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}\right)
\end{aligned}
$$

所以

$$
\boldsymbol{E(B(3)B(5))} = \mathrm{Cov}(B(3),B(5)) + E(B(3))E(B(5)) = 0+3\times 4 \boldsymbol{= 12}
$$

□

7. 令 $Y(t)=B^2(t)-t$, $R(t)=e^{cB(t)-c^2t/2}$，其中 $c>0$ 为常数。证明对任意 $0\leqslant t<s$，$E(Y(s)|B(t))=Y(t)$ 以及 $E(R(s)|B(t))=R(t)$。

证明：

根据推论 6.1.10，由于 $t<s$，所以 $E(B(s)|B(t))=B(t), \mathrm{Var}(B(s)|B(t))=s-t$，所以

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E(Y(s)|B(t))} &= E(B^2(s)-s|B(t)) = E(B^2(s)|B(t)) - E(s|B(t)) \\
&= \mathrm{Var}(B(s)|B(t)) + (E(B(s)|B(t)))^2 - s \\
&= s-t+(B(t))^2-s = B^2(t)-t \boldsymbol{= T(t)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E(R(s)|B(t))} &= E\left(e^{cB(s)-\frac{c^2s}{2}}\middle|B(t)\right) = E\left(e^{cB(s)}\middle|B(t)\right)E\left(e^{-\frac{c^2s}{2}}\middle|B(t)\right) \\
&= E\left(e^{cB(t)}\mid B(t)\right)E\left(e^{c(B(s)-B(t))}\middle|B(t)\right)E\left(e^{-\frac{c^2s}{2}}\mid B(t)\right) \\
&= e^{cB(t)}e^{\frac{c^2(s-t)}{2}}e^{-\frac{c^2s}{2}} = e^{cB(t)-\frac{c^2t}{2}} \boldsymbol{= R(t)}
\end{aligned}
$$

□