《随机过程》作业

岳锦鹏

2024 年 2 月 27 日——2024 年 6 月 18 日

目录

第一章　概率论复习

《随机过程》2 月 26 日作业

1. 设 X 为 k 阶矩存在的非负连续型随机变量（$k \in \mathbb{Z}^+$），证明：

$$E(X^k) = \int_0^{+\infty} kx^{k-1}P(X > x)\mathrm{d}x$$

试推广一下该结论。

证明：

设 X 的概率密度函数为 $p(x), x \in (-\infty, +\infty)$

根据数学期望的定义，同时注意到 X 是非负连续型随机变量，可知

$$E(X^k) = \int_0^{+\infty} x^k p(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^x ku^{k-1}\mathrm{d}u\right) p(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\int_0^x ku^{k-1}p(x)\mathrm{d}u\mathrm{d}x$$

交换积分次序，

$$E(X^k) = \int_0^{+\infty}\int_u^{+\infty} ku^{k-1}p(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} ku^{k-1}P(X > u)\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} kx^{k-1}P(X > x)\mathrm{d}x$$

□

推广该结论可得：设 $f(X)$ 为数学期望存在的非负连续型随机变量，且 $f(x)$ 存在导函数 $f'(x)$，则

$$E(f(X)) = \int_0^{+\infty} f'(x)P(X > x)\mathrm{d}x$$

2. 若连续型随机变量 X 与 Y 相互独立，其概率密度函数分别为 $p_X(\cdot)$ 和 $P_Y(\cdot)$，证明：

$$E(\Phi(X,Y)|X) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(X,y)p_Y(y)\mathrm{d}y$$

证明：

直接根据定义，在 $X = x$ 的条件下对 Y 求数学期望即可：

$$E(\Phi(x,Y)|X = x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x,y)p_Y(y)\mathrm{d}y$$

所以

$$E(\Phi(X,Y)|X)=\int_{\mathbb{R}}\Phi(X,y)p_Y(y)\mathrm{d}y$$

□

3. 从 1 到 9 中有放回地抽取数字，每次抽一个，直到奇数和偶数都被抽到时位置。求该过程中抽到奇数的次数在全部抽取次数中占比的期望（结果保留 4 位有效数字）。

解：

设随机变量 X 表示首次抽到奇数时的总次数，则 $X\sim \mathrm{Ge}(\frac{5}{9})$；设随机变量 Y 表示首次抽到偶数时的总次数，则 $Y\sim \mathrm{Ge}(\frac{4}{9})$。设随机变量 Z 表示该过程中抽到奇数的次数在全部抽取次数中的占比，则 EZ 为所求的期望。

根据几何分布的数学期望可知，$EX=\frac{1}{\frac{5}{9}}=\frac{9}{5}$, $EY=\frac{1}{\frac{4}{9}}=\frac{9}{4}$。

根据重期望公式，$EZ=E(E(Z|X))$，下面计算 $E(Z|X)$

$$E(Z|X=x)=\begin{cases}\frac{EY}{EY+1}=\frac{\frac{9}{4}}{\frac{9}{4}+1}=\frac{9}{13}, & x=1\\ \frac{1}{EX}=\frac{1}{\frac{9}{5}}=\frac{5}{9}, & x>1\end{cases}$$

再对 X 求期望，

$$EZ=E(E(Z|X))=\frac{9}{13}\times\frac{5}{9}+\frac{5}{9}\times(1-\frac{5}{9})=\frac{665}{1053}\approx 0.6315$$

□

4. 设闯入果园的猩猩数 X 服从参数为 $\lambda(>0)$ 的 Poisson 分布,每只猩猩独立地以概率 $p(\in(0,1))$ 成功地抢到香蕉，而以概率 $q=1-p$ 没有抢到。请分别求闯入果园且成功抢到香蕉的猩猩数 Y 和闯入果园但没抢到香蕉的猩猩数 Z 的分布，并判断 Y 和 Z 是否独立。

解：

X 的分布列为 $P(X=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$;

所以 Y 的分布列为 $P(Y=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\displaystyle\sum_{n=k}^{\infty}C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$;

Z 的分布列为 $P(Z=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\displaystyle\sum_{n=k}^{\infty}C_n^k(1-p)^k p^{n-k}$

取 $k=0$ 时来验证 Y 和 Z 是否独立。(已知 $p\in(0,1)$)

$$P(Y=0)=e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}(1-p)^n=e^{-\lambda}\cdot\frac{1}{p}$$

$$P(Z=0)=e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}p^n=e^{-\lambda}\cdot\frac{1}{1-p}$$

$$P(Y=0,Z=0)=P(X=0)=e^{-\lambda}$$

所以

$$P(Y=0)\cdot P(Z=0)\neq P(Y=0,Z=0)$$

因此 Y 和 Z 不独立。 □

5. 重复抛一枚硬币, 假设每次试验是相互独立的, 出现正面的概率为 $p(\in(0,1))$。令 T_n 是首次出现连续 n 次正面的时刻。求 T_n 的概率母函数。

解：

设 Y 表示首次出现反面的时刻，则 $Y\sim \mathrm{Ge}(1-p)$。则 T_n 的概率母函数为:

$$\begin{aligned}\phi_{T_n}(s)=E(s^{T_n})&=s^n\sum_{i=n+1}^{\infty}P(Y=i)+\sum_{i=1}^{n}E(s^{i+T_n})P(Y=i)\\&=s^nP(Y\geqslant n+1)+\sum_{i=1}^{n}s^iE(s^{T_n})P(Y=i)\\&=s^np^n+E(s^{T_n})E(s^Y)\end{aligned}$$

即可解得

$$E(s^{T_n})=\frac{s^np^n}{1-E(s^Y)}$$

由于 $s\in[-1,1]$，$p\in(-1,1)$，所以 $ps\neq 1$，因此

$$E(s^Y)=\sum_{i=1}^{n}s^iP(Y=i)=\sum_{i=1}^{n}s^ip^{i-1}(1-p)=-\frac{s(p-1)(p^ns^n-1)}{ps-1}$$

所以

$$E(s^{T_n})=\frac{s^np^n}{1+\frac{s(p-1)(p^ns^n-1)}{ps-1}}=\frac{p^ns^n(ps-1)}{-p^ns^{n+1}+p^{n+1}s^{n+1}+s-1}$$

□

6. 设 $X_1,X_2,\cdots$ 为独立同分布的非负整数值随机变量序列，其中 X_1 的特征函数、Laplace 变换和概率母函数分别为 $\Psi_X(t)$、$L_X(\theta)$ 和 $\phi_X(s)$。而 N 是与之独立的非负整数值随机变量，其特征函数、Laplace 变换和概率母函数分别为 $\Psi_N(t)$、$L_N(\theta)$ 和 $\phi_N(s)$。令 $Z=\sum\limits_{n=1}^{N}X_n$，请分别计算 Z 的特征函数、Laplace 变换和概率母函数。

解：

使用重期望公式，Z 的特征函数可转化为

$$Ee^{itZ}=E(E(e^{itZ}|N))$$

而

$$E(e^{itZ}|N=k)=E\left(e^{it\sum_{n=1}^{k}X_n}\right)=E\left(\prod_{n=1}^{k}e^{itX_n}\right)$$

因为 $X_1, X_2, \cdots$ 独立同分布，所以

$$\text{上式} = \prod_{n=1}^{k} E(e^{itX_n}) = \prod_{n=1}^{k} \Psi_X(t) = [\Psi_X(t)]^k$$

根据概率母函数的反演公式，

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+, \forall k \in \mathbb{Z}^+, P(N=k) = \frac{\phi_N^{(k)}(0)}{k!}$$

所以 Z 的特征函数为

$$\Psi_Z(t) = Ee^{itZ} = E(E(e^{itZ}|N)) = \sum_{k=1}^{\infty} E(e^{itZ}|N=k)P(N=k) = \sum_{k=1}^{\infty} [\Psi_X(t)]^k \cdot \frac{\phi_N^{(k)}(0)}{k!}$$

同理，Z 的 Laplace 变换为

$$L_Z(\theta) = E(e^{-\theta Z}) = \sum_{k=1}^{\infty} [L_X(\theta)]^k \cdot \frac{\phi_N^{(k)}(0)}{k!}$$

Z 的概率母函数为

$$\phi_Z(s) = E(s^Z) = \sum_{k=1}^{\infty} [\phi_X(s)]^k \cdot \frac{\phi_N^{(k)}(0)}{k!}$$

□

《随机过程》第二周作业

练习题 1.3

1. 设 X 是连续型非负随机变量，证明 $L_X(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 内是一致连续的。

证明：

设 X 的概率密度函数为 $p(x)$。使用点列式等价定义，$\forall t_{1n}, t_{2n} \in [0, +\infty)$ 且 $|t_{1n} - t_{2n}| \to 0$

$$\begin{aligned}
&|L_X(t_{1n}) - L_X(t_{2n})| = \left|Ee^{-t_{1n}X} - Ee^{-t_{2n}X}\right| = \left|E(e^{-t_{1n}X} - e^{-t_{2n}X})\right| \\
&= \left|\int_0^{+\infty} (e^{-t_{1n}x} - e^{-t_{2n}x})p(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_0^{+\infty} e^{-t_{1n}x}(1 - e^{(t_{1n}-t_{2n})x})p(x)\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \left|\int_0^{+\infty} (1 - e^{(t_{1n}-t_{2n})x})p(x)\mathrm{d}x\right|
\end{aligned}$$

根据积分中值定理，$\exists \xi \in [0, +\infty)$，使得

$$\left|\int_0^{+\infty} (1 - e^{(t_{1n}-t_{2n})x})p(x)\mathrm{d}x\right| = (1 - e^{(t_{1n}-t_{2n})\xi}) \int_0^{+\infty} p(x)\mathrm{d}x = 1 - e^{(t_{1n}-t_{2n})x}$$

因为 $|t_{1n} - t_{2n}| \to 0$，所以 $1 - e^{(t_{1n}-t_{2n})x} \to 0$，因此 $|L_X(t_{1n} - t_{2n})| \to 0$，从而 $L_X(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 内是一致收敛的。

□

5. 设独立同分布的标准正态分布随机变量簇 $W_m, m > 1$ 与 $\{N(n), n \geqslant 1\}$ 独立，其中 $N(n)$ 服从泊松分布 $P(n)$。令 $Y_n = \sum_{k=1}^{N(n)} W_k$。求 Y_n 的特征函数，并证明 $n \to +\infty$ 时 $\dfrac{Y_n}{\sqrt{n}}$ 依分布收敛到一个服从标准正态分布的随机变量。

解：

Y_n 的特征函数为

$$\psi_{Y_n}(t) = Ee^{itY_n} = Ee^{it\sum_{k=1}^{N(n)} W_k} = Ee^{\sum_{k=1}^{N(n)} itW_k} = E\prod_{k=1}^{N(n)} e^{itW_k}$$

根据重期望公式，

$$\text{上式} = E\left(E\left(\prod_{k=1}^{N(n)} e^{itW_k}\middle| N(n) = p\right)\right)$$

由于 W_k 独立同分布且服从标准正态分布，所以

$$E\left(\prod_{k=1}^{N(n)} e^{itW_k}\middle| N(n) = p\right) = \prod_{k=1}^{p} Ee^{itW_k} = \prod_{k=1}^{p} \psi_{W_1}(t) = [\psi_{W_1}(t)]^p = \left[e^{-\frac{t^2}{2}}\right]^p = e^{-\frac{pt^2}{2}}$$

所以

$$\psi_{Y_n}(t) = E\left(e^{-\frac{t^2 N(n)}{2}}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{t^2 k}{2}} \frac{n^k}{k!} e^{-n}$$

□

证明：

根据特征函数的性质，

$$\psi_{\frac{Y_n}{\sqrt{n}}}(t) = \psi_{Y_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2 \cdot k}{2}} \frac{n^k}{k!} e^{-n} = e^{-n}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^k e^{-\frac{kt^2}{2n}}}{k!}$$

当 $n \to +\infty$ 时上式 $\to e^{-\frac{t^2}{2}}$，即 $\frac{Y_n}{\sqrt{n}}$ 的特征函数收敛到标准正态分布的特征函数。根据特征函数的唯一性，则 $n \to +\infty$ 时 $\frac{Y_n}{\sqrt{n}}$ 依分布收敛到一个服从标准正态分布的随机变量。

□

7. 若随机变量 X 的分布列为 $P(X = n) = \frac{n}{2^{n+1}}, n \geqslant 1$，求 X 的概率母函数 $\phi(s)$。

解：

$$\phi(s) = Es^X = \sum_{n=1}^{\infty} s^n \cdot \frac{n}{2^{n+1}} = \frac{s}{(s-2)^2}\ , \quad s \in [-1, 1]$$

□

8. 已知概率母函数 $\phi(s)=s+\frac{1}{1+\gamma}(1-s)^{1+\gamma},\gamma\in(0,1]$，求对应的概率分布列。

解 :

$$P(X=k)=\frac{\phi^{(k)}(0)}{k!}$$

对 $\phi(s)$ 求各阶导数:

$$\phi^{(k)}(x)=\begin{cases} s+\frac{1}{1+\gamma}(1-s)^{1+\gamma}, & k=0\\ 1-(1-s)^{\gamma}, & k=1\\ (-1)^k(1-s)^{\gamma-k+1}\displaystyle\prod_{i=0}^{k-2}(\gamma-i), & k\geqslant 2\end{cases};$$

所以

$$\phi^{(k)}(0)=\begin{cases} \frac{1}{1+\gamma}, & k=0\\ 0, & k=1\\ (-1)^k\displaystyle\prod_{i=0}^{k-2}(\gamma-i), & k\geqslant 2\end{cases}$$

所以对应的概率分布列为

$$P(X=k)=\begin{cases} \frac{1}{1+\gamma}, & k=0\\ 0, & k=1\\ \dfrac{(-1)^k}{k!}\displaystyle\prod_{i=0}^{k-2}(\gamma-i), & k\geqslant 2\end{cases}$$

□

练习题 1.4

1. 若存在随机变量 X 使得随机序列 $\dfrac{S_n}{n} \xrightarrow{a.s.} X$ 成立，而且非负整数值随机序列 $N_n \xrightarrow{a.s.} \infty$ 成立。证明 $\dfrac{S_{N_n}}{N_n} \xrightarrow{a.s.} X$。

证明 :

对于 $\forall \varepsilon > 0$，由 $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{a.s.} X$ 的等价定义，$\exists A \in \Omega$ 满足 $P(A) = 0$，对 $\forall \omega \in \Omega A$ 以及 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N = N(\varepsilon, \omega)$，使得当 $n > N$ 时 $\left|\frac{S_n(\omega)}{n} - X(\omega)\right| < \varepsilon$

对于上述的 N，由 $N_n \xrightarrow{a.s.} \infty$ 的等价定义，$\exists A' \in \Omega$ 满足 $P(A') = 0$，对 $\forall \omega' \in \Omega A$，$\exists M = M(\varepsilon, \omega)$，使得当 $n > M$ 时 $N_n(\omega') > N$，再由上述叙述可知 $\left|\dfrac{S_{N_n(\omega')}(\omega)}{N_n(\omega')} - X(\omega)\right| < \varepsilon$

因此 $\dfrac{S_{N_n}}{N_n} \xrightarrow{a.s.} X$ □

2. 证明：若对任意 $\varepsilon > 0$，存在 N 使得当 $n > N$ 时 $P(|X_n - X| < \varepsilon) = 1$，那么 $X_n \xrightarrow{a.s.} X$。举例说明逆命题不成立。

证明 :

由于 $P(|X_n - X| < \varepsilon) = 1 \Rightarrow P(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) = 0$，题中条件可转换为

$$对\forall \varepsilon > 0, P\left(\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}\{|X_n - X| \geqslant \varepsilon\}\right) = 0$$

所以 $X_n \xrightarrow{a.s.} X$。

□

当 $P(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) = 0$ 但 $P(|X_n - X| < \varepsilon) \neq 1$ 时，逆命题不成立。

4. 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续有界，单调上升且 $f(0) = 0$，证明随机变量 X_n 依概率收敛于 0 当且仅当 $\lim\limits_{n\to\infty} E(f(|X_n|)) = 0$。

证明 :

若 $X_n \xrightarrow{P} 0$，则 $\forall \varepsilon > 0, P(|X_n| > \varepsilon) \to 0$，由于 $f(x)$ 的单调性，$P(f(|X_n|) > f(\varepsilon)) \to 0$。令 $\varepsilon \to 0$，则 $f(\varepsilon) \to f(0) = 0$，所以 $P(f(|X_n|) > 0) \to 0$。

因为 $|X_n| \geqslant 0$,且 $f(x)$ 单调上升且 $f(0) = 0$,所以 $f(|X_n|) \geqslant 0$,因此 $P(f(|X_n|) = 0) \to 1$。

$f(|X_n|)$ 在 0 处的概率趋向于 1，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} E(f\,|X_n|) = 0$。

另一方向:

若 $\lim\limits_{n\to\infty} E(f(|X_n|)) = 0$，由于 $f(|X_n|)$ 是非负随机变量，所以期望为 0 等价于在 0 处的概率为 1，即 $\lim\limits_{n\to\infty} P(f(|X_n|) = 0) = 1$，即 $P(f(|X_n|) = 0) \to 1$。

由于 $f(|X_n|) \geqslant 0$，所以 $P(f(|X_n|) > 0) \to 0$。

再根据 $f(x)$ 的单调性，$P(|X_n| > 0) \to 0$。

因此 $\forall \varepsilon > 0, P(|X_n| > \varepsilon) \to 0$，即 X_n 依概率收敛于 0。 □

5. 设 $\{X_k; k \geqslant 1\}$ 为一列相互独立随机变量，而且对任意 $k \geqslant 1$，$E(X_k) = 0$，$\mathrm{Var}(X_k) = k$。对任意 $n \geqslant 1$，令 $Y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{k}$。证明对任意 $r > \frac{1}{2}$，当 $n \to \infty$ 时 $\frac{Y_n}{n^r}$ 几乎必然收敛到 0。

证明：

要证 $\frac{Y_n}{n^r} \xrightarrow{a.s.} 0$，即证 $\forall \varepsilon > 0, \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\left|\frac{Y_n}{n^r}\right| > \varepsilon\right) < \infty$。

由马尔可夫不等式，

$$P\left(\left|\frac{Y_n}{n^r}\right| > \varepsilon\right) < \frac{E\left|\frac{Y_n}{n^r}\right|}{\varepsilon} = \frac{E\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{k}\right|}{n^r \varepsilon}$$

由于 $\mathrm{Var}(X_k) = k, std(X_k) = \sqrt{k}$ 且 $E(X_k) = 0$，所以 $std(\frac{X_k}{k}) = \frac{1}{\sqrt{k}}$，所以 $\mathrm{Var}(\frac{X_k}{k}) = \frac{1}{k}$。

$$E\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{k}\right| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}}\right| = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

所以

$$P\left(\left|\frac{Y_n}{n^r}\right| > \varepsilon\right) < \frac{\sqrt{n}}{n^r \varepsilon} = n^{\frac{1}{2}-r}\varepsilon$$

对 $\forall r > \frac{1}{2}$，当 $n \to \infty$ 时 $n^{\frac{1}{2}-r} \to 0$。所以 $\forall \varepsilon > 0, \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\left|\frac{Y_n}{n^r}\right| > \varepsilon\right)$ 收敛。

因此 $\forall r > \frac{1}{2}$，当 $n \to \infty$ 时 $\frac{Y_n}{n^r}$ 几乎必然收敛到 0。

□

第二章　简单随机模型

《随机过程》第三周作业

练习题 2.1

1. 试解释对离散参数随机过程而言,“不可区分”与“修正”等价。

由于“不可区分”能推出“修正”,所以这里只需要说明对离散参数随机过程能从“修正”推出“不可区分”。

设 $X = \{X_t; t \in T\}, Y = \{Y_t; t \in T\}$ 都是概率空间 $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ 上的随机过程。

“修正”的原始定义为对 $\forall t \in T, P(X_t = Y_t) = 1$, 将概率进行定义展开可得: $\forall t \in T, \exists A_t \in \mathfrak{F}$ 使得 $P(A) = 1$ 而且 $\forall \omega \in A, X_t(\omega) = Y_t(\omega)$。

“不可区分”的定义为 $\exists A \in \mathfrak{F}$, 使得 $P(A) = 1$ 而且 $\forall t \in T, \forall \omega \in A, X_t(\omega) = Y_t(\omega)$。

比较这两个定义可知在“修正”的定义中 A_t 的取法与 t 有关,而在“不可区分”的定义中 A 的取法与 t 无关。

所以若 T 为离散参数集,且 X 与 Y 互为修正,则对每一个 $t \in T$ 都能找到一个 $A_t \in \mathfrak{F}$ 满足 $P(A_t) = 1, \forall \omega \in A_t, X_t(\omega) = Y_t(\omega)$。则 $P(\overline{A_t}) = 0$, 取 $A = \bigcap\limits_{t \in T}(A_t)$, 则

$$P(A) = P\left(\bigcap_{t \in T} A_t\right) = P\left(\overline{\bigcup_{t \in T} \overline{A_t}}\right) = 1 - P\left(\bigcup_{t \in T} \overline{A_t}\right)$$

由于 T 是离散集合, 可列个零测集的并仍然是零测集, 所以 $P\left(\bigcup\limits_{t \in T} \overline{A_t}\right) = 0$, 所以 $P(A) = 1$。而且 $\forall \omega \in A, X_t(\omega) = Y_t(\omega)$, 即 X 与 Y 不可区分。

5. 已知 $\{X(t)\ ;\ t \in [0, +\infty)\}$ 为平稳独立增量过程。对任意 $s > 0$, 令 $Y(t) = X(s+t) - X(s)$, 证明 $\{Y(t)\ ;\ t \in [0, +\infty)\}$ 也是平稳独立增量过程。

证明:

对于 $\forall n \in \mathbb{Z}^+, \forall t_1, t_2, \cdots, t_n \in [0, +\infty), \forall i \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$,

$$Y(t_{i+1}) - Y(t_i) = [X(s + t_{i+1}) - X(s)] - [X(s + t_i) - X(s)] = X(s + t_{i+1}) - X(s + t_i)$$

因为 $s>0$，所以 $s+t_{i+1}, s+t_i \in [0,+\infty)$，由 $\{X(t)\ ;\ t\in[0,+\infty)\}$ 是独立增量过程可知，$\{X(s+t_{i+1})-X(s+t_i)\ ;\ i\in 1,2,\cdots,n-1\}$ 相互独立，即 $\{Y(t_{i+1})-Y(t_i)\ ;\ i\in 1,2,\cdots,n-1\}$ 相互独立，所以 $\{Y(t)\ ;\ t\in[0,+\infty)\}$ 是独立增量过程。下证"平稳"：

对于 $\forall t, t+h, w, w+h \in [0,+\infty)$，

$$Y(t+h)-Y(t) = [X(s+t+h)-X(s)] - [X(s+t)-X(s)] = X(s+t+h)-X(s+t)$$

同理，$Y(w+h)-Y(w) = X(s+w+h)-X(s+w)$。由于 $s+t, s+t+h,\ s+w, s+w+h \in [0,+\infty)$，且 $\{X(t)\ ;\ t\in[0,+\infty)\}$ 是平稳独立增量过程，所以 $X(s+t+h)-x(s+t)$ 与 $X(s+w+h)-X(s+w)$ 的分布相同，即 $Y(t+h)-Y(t)$ 与 $Y(w+h)-Y(w)$ 的分布相同，所以 $\{Y(t)\ ;\ t\in[0,+\infty)\}$ 是平稳独立增量过程。 □

6. 证明伯努利过程不是独立增量过程。

证明：

设随机过程 $X=\{X_n\ ;\ n\in\mathbb{Z}_+\}$ 是伯努利过程，则 $\{X_n\ ;\ n\in\mathbb{Z}_+\}$ 是独立同分布的随机变量序列，而且

$$P(X_n=1)=p, \qquad P(X_n=0)=q=1-p, \quad 0<p<1$$

则 X_1-X_0 的分布列为：

X_1-X_0	-1	0	1
P	pq	p^2+q^2	qp

所以 $P(X_0=1)=p$，$P(X_1-X_0=1)=qp$，而 $P(X_0=1, X_1-X_0=1)=0$。显然 $P(X_0=1)P(X_1-X_0=1)\neq P(X_0=1, X_1-X_0=1)$，因此 X_0 与 X_1-X_0 不独立，从而伯努利过程不是独立增量过程。 □

《随机过程》第四周作业

练习题 2.2

1. 已知 W 是初值为 0 的随机游动，步长分布为

$$P(X_n=-2)=P(X_n=-1)=P(X_n=1)=\frac{1}{3}$$

(1) 求概率 $P(W_3=-2)$，

解：

设 m,n,k 分别为选择 $-2,-1,1$ 的次数，那么

$$\begin{cases} m+n+k=3 \\ -2m-n+k=-2 \end{cases}$$

由此可得 $3m+2n=5$。由于 m,n,k 均为非负整数，因此

$$(m,n,k)=(1,1,1)$$

所以

$$P(W_3=-2)=p_3(0,-2)=C_3^1C_2^1\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{2}{9}$$

□

(2) 求概率 $P(W_3=-2,W_7=0)$。

解：

$$P(W_3=-2,W_7=0)=p_3(0,-2)p_4(-2,0)=p_3(0,-2)p_4(0,2)$$

继续同上方法

$$\begin{cases} m+n+k=4 \\ -2m-n+k=2 \end{cases} \implies (m,n,k)=(0,1,3)$$

$$p_4(0,2)=\mathrm{C}_4^1\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{4}{81}$$

所以

$$P(W_3=-2,W_7=0)=\frac{2}{9}\times\frac{4}{81}=\frac{8}{729}$$

□

(3) 求概率 $P(W_1>0,W_2>0,\cdots,W_5>0,W_6=2)$。

解：

根据反射原理，

$$\begin{aligned}
&P(W_1>0,W_2>0,\cdots,W_5>0,W_6=2)\\
=&P(W_1=1)P(W_2>0,\cdots,W_5>0,W_6=2)\\
=&P(W_1=1)P(W_2>0,\cdots,W_5>0,W_6=2)\\
=&P(W_1=1)p_5(-1,2)=P(W_1=1)p_5(0,3)
\end{aligned}$$

继续同上方法

$$\begin{cases} m+n+k=5 \\ -2m-n+k=3 \end{cases} \implies (m,n,k)=(0,1,4)$$

$$p_5(0,3)=\mathrm{C}_5^1\left(\frac{1}{3}\right)^5=\frac{5}{243}$$

所以

$$\text{原式}=P(W_1=1)p_5(0,3)=\frac{1}{3}\times\frac{5}{243}=\frac{5}{729}$$

□

5. 分别记甲乙两种药物对某种疾病的治愈率为 p_1, p_2。为了比较它们的治愈率大小, 安排了一系列如下的临床对比试验: 每次试验同时治疗两个病人, 一个接受甲药治疗，另一个接受乙药治疗。观察每次治疗效果。假设每次试验是独立的; 病人对药物的疗效无本质影响。试用恰当的整数值随机游动模型对这样一系列的试验中治愈病人数差异的变化建模。对任意 $x \in \mathbb{Z}$, 试写该模型的一步转移概率 $p(x)$。

解：

设随机变量 $X_0 = 1$，随机变量序列 $\{X_n\ ;\ n \geqslant 1\}$ 表示每次试验增加的治愈病人数，而随机过程 $W = \{\sum_{k=0}^{n} X_k\ ;\ n \geqslant 0\}$ 表示这样一系列的试验中总治愈病人数，则 $\{X_n\ ;\ n \geqslant 0\}$ 相互独立且只能取整数值，且对 $\forall n \geqslant 1$，X_n 的分布相同，从而 W 是整数值的随机游动。则该模型的一步转移概率为

$$p(x) = \begin{cases} (1-p_1)(1-p_2), & x = 0 \\ p_1(1-p_2) + p_2(1-p_1), & x = 1 \\ p_1p_2, & x = 2 \end{cases} = \begin{cases} 1 - p_1 - p_2 + p_1p_2, & x = 0 \\ p_1 + p_2 - 2p_1p_2, & x = 1 \\ p_1p_2, & x = 2 \end{cases}$$

□

6. 对初值为 0 的简单对称随机游动 W,

(1) 对任意 $n \geqslant 1$，证明 $P(W_1 \neq 0, W_2 \neq 0, \cdots, W_{2n} \neq 0) = P(W_{2n} = 0)$。

证明：

$$\text{左边} = P(\tau_0 > 2n), \quad \text{右边} = \mathrm{C}_{2n}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$P(\tau_0 > 2n) = 1 - P(\tau_0 \leqslant 2n) = 1 - \sum_{m=1}^{2n} P(\tau_0 = m)$$

由于 $P(\tau_0\text{为奇数}) = 0$，所以

$$P(\tau_0 > 2n) = 1 - \sum_{i=1}^{n} P(\tau_0 = 2i) = 1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i-1} \mathrm{C}_{2i}^{i} \left(\frac{1}{2}\right)^{2i} = \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(n+1)}$$

使用 Python 计算可得

$$\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(n+1)} - \binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = 0$$

即

$$P(\tau_0 > 2n) = \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(n+1)} = \binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \mathrm{C}_{2n}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

因此

$$\text{左边} = \text{右边}$$

□

(2) 令 $F_1(s)=\sum_{k=1}^{\infty}P(\tau_1=k|W_0=0)s^k$，其中 $|s|<1$，求 $F_1(s)$。

解：

$$\begin{aligned}F_1(s)&=\sum_{k=1}^{\infty}P_0(\tau_1=k)s^k=\sum_{k=1}^{\infty}P(\tau_1=k,W_k=1)s^k\\&=\sum_{k=1}^{\infty}P(\tau_1=k|W_k=1)P(W_k=1)s^k\end{aligned}$$

根据对称原理，从 0 经过 k 步到 1 中间不碰 1，相当于从 0 经过 k 步到 1 中间不碰 0。

$$\begin{aligned}\text{上式}&=\sum_{k=1}^{\infty}P(\tau_0>k|W_k=1)P(W_k=1)s^k\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\mathrm{C}_k^{\frac{k-1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}s^k\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}\frac{k!s^k}{\frac{k+1}{2}!\frac{k-1}{2}!}\end{aligned}$$

而 $\sqrt{1-x}$ 在 $x=0$ 点的幂级数展开为

$$\sqrt{1-x}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n n!$$

所以

$$F_1(s)=\frac{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{-k}s^k\Gamma(\frac{k}{2})}{\Gamma(\frac{k+3}{2})}}{2\sqrt{\pi}}$$

□

7. 对初值为 0 的简单随机游动 W, 证明: 对任意正整数 N 以及与 N 同奇偶的整数 $a\in[-N,N]$,

$$P(W_k<k,k=1,\cdots,N-1|W_N=a)=\frac{N-a}{2N}$$

证明：

设 W 是 (q,p) 简单随机游动

$$\begin{aligned}&P(W_k<k,k=1,\cdots,N-1|W_N=a)=\frac{P(W_k<k,k=1,\cdots,N-1,W_N=a)}{P(W_N=a)}\\&=\frac{q\cdot P(W_N=a|W_1=-1)}{P(W_N=a|W_0=0)}=\frac{q\cdot P(W_{N-1}=a+1|W_0=0)}{P(W_N=a|W_0=0)}\\&=\frac{q\cdot\mathrm{C}_{N-1}^{\frac{N+a}{2}}p^{\frac{N+a}{2}}q^{\frac{N-a}{2}-1}}{\mathrm{C}_N^{\frac{N+a}{2}}p^{\frac{N+a}{2}}q^{\frac{N-a}{2}}}=\frac{\mathrm{C}_{N-1}^{\frac{N+a}{2}}}{\mathrm{C}_N^{\frac{N+a}{2}}}=\frac{\frac{(N-1)!}{(\frac{N+a}{2})!(\frac{N-a}{2}-1)!}}{\frac{N!}{(\frac{N+a}{2})!(\frac{N-a}{2})!}}=\frac{\frac{1}{1}}{\frac{N}{\frac{N-a}{2}}}=\frac{\frac{N-a}{2}}{N}\\&=\frac{N-a}{2N}\end{aligned}$$

□

《随机过程》3 月 25 日作业

（以下总假设 $N=\{N(t)\ ;\ t\geqslant 0\}$ 是强度为 λ 的 Poisson 过程。）

1. 已知 T 服从参数为 μ 的指数分布，且与过程 N 相互独立。求 $N(T)$ 的分布列。

解：

T 的概率密度函数为 $P(T=t)=\mu e^{-\mu t}$，$N(t)$ 的分布列为 $P(N(t)=k)=\dfrac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$，所以 $N(T)$ 的分布列为

$$\begin{aligned}P(N(T)=k)&=\int_0^{+\infty}P(N(t)=k)P(T=t)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}\mu e^{-\mu t}\mathrm{d}t\\&=\frac{\mu\lambda^k}{(\lambda+\mu)^{k+1}}\int_0^{+\infty}\frac{(\lambda+\mu)^{k+1}}{\Gamma(k+1)}t^k e^{-(\lambda+\mu)t}\mathrm{d}t\\&=\frac{\mu\lambda^k}{(\lambda+\mu)^{k+1}}\end{aligned}$$

□

2. 对任意 $0<s<t$，求条件概率 $P(N(s)=k|N(t)=n)$（其中 $0\leqslant k\leqslant n$ 为整数），并给出所求结果的直观解释。

解：

$$P(N(s)=k|N(t)=n)=\frac{P(N(s)=k,N(t)=n)}{P(N(t)=n)}=\frac{P(N(s)=k,N(t)-N(s)=n-k)}{P(N(t)=n)}$$

由于泊松过程是初值为 0 的平稳独立增量过程，所以

$$\text{上式}=\frac{P(N(s)=k)P(N(t)-N(s)=n-k)}{P(N(t)=n)}=\frac{P(N(s)=k)P(N(t-s)=n-k)}{P(N(t)=n)}$$

由于 $N(t)$ 服从强度为 λt 的泊松分布，所以

$$\begin{aligned}\text{上式}&=\frac{\frac{(\lambda s)^k}{k!}e^{-\lambda s}\cdot\frac{(\lambda(t-s))^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda(t-s)}}{\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}}\\&=\frac{\lambda^k s^k\lambda^{n-k}(t-s)^{n-k}n!e^{-\lambda s}e^{-\lambda t+\lambda s}}{k!(n-k)!\lambda^n t^n e^{-\lambda t}}\\&=\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{s^k(t-s)^{n-k}}{t^n}\\&=\mathrm{C}_n^k\left(\frac{s}{t}\right)^k\left(1-\frac{s}{t}\right)^{n-k}\end{aligned}$$

可以看到这是二项分布 $b\left(n,\dfrac{s}{t}\right)$ 的分布列，那么所求结果的直观解释也就很明显了：

所求的条件概率为，已知在 t 时刻计数到 n，求在 s 时刻计数到 k 的概率。也就是已知在时间 $[0,t]$ 中发生了 n 次事件，求其中 k 次发生在时间 $[0,s]$ 的概率。记发生在时间 $[0,s]$

为“成功”，那么也就是 n 次试验，求成功 k 次的概率。可以认为一次事件等概率落在区间中任何一个点，那么一次试验成功的概率就是区间长度的比值，也就是 $\frac{s}{t}$。因此所求的条件概率为二项分布 $b(n, \frac{s}{t})$ 的分布列。 □

3. 对 $s, t > 0$，证明 $N(t+s) - N(s) \sim \text{Poi}(\lambda t)$，且与 $N(s)$ 独立。

证明：

因为 $N(t)$ 是平稳独立增量过程，所以 $N(t+s) - N(s)$ 与 $N(t) - N(0)$ 同分布，又由于 $N(0) = 0$，$N(t) - N(0) = N(t) \sim \text{Poi}(\lambda t)$，所以 $N(t+s) - N(s) \sim \text{Poi}(\lambda t)$。

同样，因为 $N(t)$ 是平稳独立增量过程，所以 $N(t+s) - N(s)$ 与 $N(s)$ 独立。 □

4. 已知到达某航运公司办公室的客户服从平均速率为每小时 3 个的 Poisson 过程。公司职员应当早晨 8 点开始办公，但是 David 睡过了头，早晨 10 点才到办公室。问:

(1) 在这两个小时期间没有客户到达的概率是多少?

解：

设 $N = \{N(t)\,;\, t \geqslant 0\}$ 表示在 $t+8$ 时到达某航运公司办公室的客户数量，则 N 为强度 $\lambda = 3$ 的泊松过程。(t 以小时为单位)

因为

$$P(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda}$$

所以所求概率为

$$P(N(2) = 0) = \frac{(3 \times 2)^0}{0!} e^{-3\times 2} = e^{-6}$$

也可以用 T 来刻画，已知 $T_n \sim \text{Ga}(n, \lambda)$，从而 $P(T_1 = t) = \lambda e^{-\lambda t}$，所以

$$P(T_1 \geqslant 2) = \int_2^{+\infty} P(T_1 = t)\mathrm{d}t = \int_2^{+\infty} 3e^{-3t}\mathrm{d}t = e^{-6}$$

同样可以得到结果 e^{-6}。 □

(2) 直到他的第一个客户到达，David 需要等待时间的分布是什么?

解：

即 $T_1 \sim \text{Ga}(1, \lambda)$，即 $W_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$，也就是需要等待的时间服从参数为 λ 的指数分布。 □

5. 对 $t \geqslant 0$，定义 $A(t) = t - T_{N(t)}$，$R(t) = T_{N(t)+1} - t$，$L(t) = T_{N(t)+1} - T_{N(t)}$，其中 $T_k = \inf\{t \geqslant 0\,;\, N(t) \geqslant k\}(k \in \mathbb{N})$。

(1) 求 $(A(t), R(t))$ 的联合分布函数与各个分量的边际分布函数，并判断 $A(t)$ 与 $R(t)$ 是否相互独立；

解：

可以从定义看出 $A(t)$ 表示当前时刻与上一次发生事件的时刻之差，而 $R(t)$ 表示下一次发生新的事件的时刻与当前时刻之差。$L(t)$ 表示下一次发生新的事件的时刻与上一次发生事件的时刻之差。$(A(t), R(t))$ 的联合分布函数涉及到随机变量的嵌套，较为复杂，$A(t)$ 与 $R(t)$ 应该不相互独立。 □

(2) 对任意 $x > 0$，计算 $P(L(t) > x)$，并说明其严格大于 $P(W_1 > x)$。

解：

比较定义可知 $L(t) = W_{N(t)+1}$，所以 $P(L(t) > x) = P(W_{N(t)+1} > x) > P(W_1 > x)$。 □

6.（**Poisson 过程的强大数定律**）证明：当 $t \to \infty$ 时有 $\dfrac{N(t)}{t} \xrightarrow{a.s.} \lambda$。

证明：

由于 $N(t)$ 服从强度为 λt 的泊松分布，所以

$$P(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

所以

$$P\left(\frac{N(t)}{t} = \frac{k}{t}\right) = \frac{(\lambda t)^{t \cdot \frac{k}{t}}}{(t \cdot \frac{k}{t})!} e^{-\lambda t}$$

令 $n = \dfrac{k}{t}$，则

$$P\left(\frac{N(t)}{t} = n\right) = \frac{(\lambda t)^{tn}}{(tn)!} e^{-\lambda t}$$

当 $t \to \infty$ 时，应该能据此证明 $P\left(\dfrac{N(t)}{t} \to \lambda\right) = 1$，从而 $\dfrac{N(t)}{t} \xrightarrow{a.s.} \lambda$。 □

第三章　离散时间马尔可夫链

《随机过程》4 月 1 日作业

1. 假设 $N = \{N(t) : t \geqslant 0\}$ 是强度为 λ 的 Poisson 过程，且 $T_k = \inf\{t \geqslant 0 : N(t) \geqslant k\}(k \in \mathbb{N})$。分别计算条件期望 $E(T_{2024}|N(2024) = 2024)$ 和 $E(T_{2025}|N(2024) = 2024)$。

解：

由于 $N(2024) = 2024 \iff T_{2024} \leqslant 2024 < T_{2025}$，所以所求的条件期望中只涉及到 T_{2024} 和 T_{2025} 这两个随机变量，因此可以先求 (T_{2024}, T_{2025}) 的联合分布。设 (T_{2024}, T_{2025}) 的联合概率密度函数为 $p(x, y)$。

由于 $T_{2025} = T_{2024} + W_{2025}$，所以可以先求 (T_{2024}, W_{2025}) 的联合概率密度函数。已知 $T_{2024} \sim \mathrm{Ga}(2024, \lambda), W_{2025} \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$，且 T_{2024} 与 W_{2025} 相互独立，因此

$$p_{(T_{2024}, W_{2025})}(u, v) = \frac{\lambda^{2024}}{\Gamma(2024)} u^{2024-1} e^{-\lambda u} \cdot \lambda e^{-\lambda v} = \frac{\lambda^{2025} u^{2023} e^{-\lambda(u+v)}}{\Gamma(2024)}$$

由于 $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = 1$，所以

$$p(x, y) = p_{(T_{2024}, T_{2025})}(x, y) = p_{(T_{2024}, W_{2025})}(x, y - x) = \frac{\lambda^{2025} x^{2023} e^{-\lambda y}}{\Gamma(2024)}$$

所以

$$\begin{aligned}
E(T_{2024}|N(2024) = 2024) &= E(T_{2024}|T_{2024} \leqslant 2024 < T_{2025}) \\
&= \iint\limits_{(-\infty, 2024] \times [2024, +\infty)} x p(x, y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{2024} \int_{2024}^{+\infty} \frac{\lambda^{2025} x^{2024} e^{-\lambda y}}{\Gamma(2024)} \mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \frac{\lambda^{2025}}{\Gamma(2024)} \int_{-\infty}^{2024} x^{2024} \mathrm{d}x \int_{2024}^{+\infty} e^{-\lambda y} \mathrm{d}y
\end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned}
E(T_{2025}|N(2024) = 2024) &= \iint\limits_{(-\infty, 2024] \times [2024, +\infty)} y p(x, y) \mathrm{d}d\mathrm{d}y \\
&= \frac{\lambda^{2025}}{\Gamma(2024)} \int_{-\infty}^{2024} x^{2023} \mathrm{d}x \int_{2024}^{+\infty} y e^{-\lambda y} \mathrm{d}y
\end{aligned}$$

计算到这里实在计算不下去了。 □

2. 考虑一个从底层起动（不是启动?）上升的电梯。以 N_i 记在第 i 层进入电梯的人数。假定各 N_i 相互独立，且 $N_i \sim \mathrm{Poi}(\lambda_i)(\forall i)$。在第 i 层进入电梯的各个人相互独立地以概率 p_{ij} 在第 j 层 $(j > i)$ 离开电梯，$\sum\limits_{j>i} p_{ij} = 1$。用 O_j 表示在第 j 层离开电梯的人数。求 O_j 的分布列。

解：

在第 i 层进入电梯的人数为 N_i 且各个人相互独立地一概率 p_{ij} 在第 j 层 $(j > i)$ 离开电梯，因此在第 j 层离开电梯的人数的期望为 $\sum\limits_{i=1}^{j} N_i p_{ij} = O_j$

根据泊松过程的性质，$N_i p_{ij} \sim \mathrm{Poi}(\lambda_i p_{ij})$，$\sum\limits_{i=1}^{j} N_i p_{ij} = O_j \sim \mathrm{Poi}\left(\sum\limits_{i=1}^{j} \lambda_i p_{ij}\right)$。

所以 O_j 的分布列为

$$P(O_j = k) = \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{j} \lambda_i p_{ij}}}{k!} e^{-\sum_{i=1}^{j} \lambda_i p_{ij}}$$

□

3. (冲击模型）记 $X(t)$ 为某系统截至时刻 t 受到的冲击次数。$X = \{X(t) : t \geqslant 0\}$ 是强度为 λ 的 Poisson 过程。设 Y_k 为第 k 次冲击对系统的损害值，满足 $Y_1, Y_2, \cdots \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathrm{Exp}(\mu)$。以 $Z(t)$ 记截至时刻 t 系统所受到的总损害值。当总损害超过一定的指标 α 时系统不能运行下去，寿命终止。记 T 为系统寿命，求 $E(T)$。

解：

由于泊松过程本身和它的停时有良好的互转关系，所以可以按照如下方式转化原问题：注意到此问题中有三个指标：时刻、冲击次数、损害值，于是

设 A_k 表示第 k 次冲击后系统所受到的总损害值，由于 $Y_1, Y_2, \cdots \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathrm{Exp}(\mu)$，则

$$A_k = \sum_{i=1}^{k} Y_k \sim \mathrm{Ga}(k, \mu)$$

与之对应，设 $B(x)$ 表示总损害值为 x 时受到的冲击次数，则

$$B(x) \sim \mathrm{Poi}(\mu)$$

再设 C_k 表示冲击次数为 k 时的时刻，由于 $X(t) \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$，所以

$$C_k \sim \mathrm{Ga}(k, \lambda)$$

所以所求的 $E(T)$ 可以表述为总损害值为 α 时对应的冲击次数对应的时刻，使用重期望公式可得

$$E(T) = E(C_{B(\alpha)}) = E(E(C_{B(\alpha)}|B(\alpha)))$$

由于 $E(C_{B(\alpha)}|B(\alpha) = k) = E(C_k) = \frac{k}{\lambda}$，所以

$$E(T) = E\left(\frac{B(\alpha)}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda} E(B(\alpha)) = \frac{\alpha\mu}{\lambda}$$

□

4. 考虑速率函数为 $\lambda(t) > 0(\forall t \geqslant 0)$ 的非齐次 Poisson 过程 $X = \{X(t) : t \geqslant 0\}$。令

$$m(t) = \int_0^t \lambda(u)\mathrm{d}u \qquad (t \geqslant 0),$$

$m(t)$ 的反函数记为 $l(t)$。对 $t \geqslant 0$，记 $Y(t) = X(l(t))$。证明 $Y = \{Y(t) : t \geqslant 0\}$ 是经典 Poisson 过程，并求它的强度。

解：

由题意可知 $X(t) \sim \mathrm{Poi}(m(t))$，又知 $m(t)$ 和 $l(t)$ 互为反函数，所以

$$Y(t) = X(l(t)) \sim \mathrm{Poi}(m(l(t))) = \mathrm{Poi}(t)$$

所以 $T = \{Y(t) : t \geqslant 0\}$ 是经典 Poisson 过程，它的强度为 1。 □

5. 重复地抛掷一枚均匀硬币，抛掷结果为 $Y_0, Y_1, Y_2, \cdots$，它们取值为 1（表示正面）或 0（表示反面）的概率均为 $\frac{1}{2}$。用 $X_n = Y_{n-1} + Y_n$ 表示第 $n-1$ 次和第 n 次抛掷出正面的总次数 $(n \geqslant 1)$。问 $X = \{X_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ 是否是马氏链？并说明理由。

解：

$\forall n \in \mathbb{Z}^+, \forall i_1, \cdots, i_{n-1}, i, j \in S = \{0, 1\}$,

$$\begin{aligned} &P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, X_1 = i_1) \\ =&P(Y_n + Y_{n+1} = j | Y_{n-1} + Y_n = i, \cdots, Y_0 + Y_1 = i_1) \end{aligned}$$

因为 $Y_0, Y_1, Y_2, \cdots$ 相互独立，所以条件概率中与 Y_n 和 Y_{n+1} 无关的条件都可以不考虑，即

$$\text{上式} = P(Y_n + Y_{n+1} = j | Y_{n-1} + Y_n = i) = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

所以 $X = \{X_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ 是马氏链。 □

6. 一个出租车司机在机场、宾馆 A、宾馆 B 之间按照如下方式行车: 如果他在机场, 那么下一时刻他将以等概率到达两个宾馆中的任意一个; 如果他在其中一个宾馆, 那么下一时刻他将以概率 3/4 返回到机场, 而以概率 1/4 开往另一个宾馆. 假设在时刻 0 时司机在机场, 求在时刻 3 时他在宾馆 A 的概率。

解：

设机场、宾馆 A、宾馆 B 分别用 0、1、2 表示，设一步转移概率矩阵为 A，则

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \qquad A^3 = \begin{bmatrix} \frac{3}{16} & \frac{13}{32} & \frac{13}{32} \\ \frac{39}{64} & \frac{3}{16} & \frac{13}{64} \\ \frac{39}{64} & \frac{13}{64} & \frac{3}{16} \end{bmatrix}$$

所求的概率为经过 3 个时刻（时间齐次）从机场到宾馆 A 的概率，即 $\dfrac{13}{32} = 0.40625$。 □

7. (天气链) 已知当昨天和前天都晴天时，今天将下雨的概率是 0.3；而当昨天和前天中至少有一天下雨时，今天将下雨的概率是 0.6。用 W_n 表示第 n 天的天气，它取值为 R（表示下雨）或 S（表示晴天）。尽管 $W = \{W_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ 不是一个马氏链，但由 $X_n = (W_{n-1}, W_n)$ 定义的 $X = \{X_n \,:\, n \in \mathbb{Z}^+\}$ 是一个时齐马氏链，其状态空间为 $\{RR, RS, SR, SS\}$。

(1) 写出 X 的一步转移概率矩阵。

解：

昨天今天 \ 今天明天	RR	RS	SR	SS
RR	0.6	0.4	0	0
RS	0	0	0.6	0.4
SR	0.6	0.4	0	0
SS	0	0	0.3	0.7

所以 X 的一步转移概率矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.4 \\ 0.6 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$$

□

(2) 求当给定某周的周一和周二都晴天的条件下，该周周四下雨的概率。

解：

题意也就是经过两步从 SS 转移到 RR 或 SR 的概率，

$$\begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.4 \\ 0.6 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0.36 & 0.24 & 0.24 & 0.16 \\ 0.36 & 0.24 & 0.12 & 0.28 \\ 0.36 & 0.24 & 0.24 & 0.16 \\ 0.18 & 0.12 & 0.21 & 0.49 \end{bmatrix}$$

所以该周周四下雨的概率为 $0.18 + 0.21 = 0.39$。 □

8. (信号传递之“愚人节说谎版”) 设在愚人节这天, 姚老师以 40% 的可能性把“下周的课考试”的消息 (以 60% 的可能性把“下周的课不考试”的消息) 传给路上偶遇的陈雨杭同学, 之后的每位同学 (从陈雨杭开始) 逐次以 70% 的可能性把刚听到的消息 (以 30% 的可能性把刚听到的消息的对立面) 传给遇到的下一位同学 (每次只传给一位同学). 假设第 20 位收到消息的是曾凡晔同学.

初始 \ 传出	考试	不考试
未知	0.4	0.6

收到 \ 传出	考试	不考试
考试	0.7	0.3
不考试	0.3	0.7

表 3.1: 左：第一次消息传递；右：后续消息传递

(1) 计算条件概率

$$P(\text{姚老师一开始说“下周的课考试”} \mid \text{曾凡晔收到“下周的课考试”的消息}).$$

解：

根据贝叶斯公式，

$$\begin{aligned}
&P(\text{姚老师一开始说“下周的课考试”} \mid \text{曾凡晔收到“下周的课考试”的消息}) \\
&= \frac{P(\text{曾凡晔收到“下周的课考试”的消息} \mid \text{姚老师一开始说“下周的课考试”}) \times P(\text{姚老师一开始说“下周的课考试”})}{P(\text{曾凡晔收到“下周的课考试”的消息})}
\end{aligned}$$

从第 1 位同学到第 20 位同学，经过了 19 次信号传递，所以 19 步概率转移矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}^{19} = \begin{bmatrix} 0.500000013743895 & 0.499999986256105 \\ 0.499999986256105 & 0.500000013743895 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

所以

$$P(\text{曾凡晔收到“下周的课考试”的消息} \mid \text{姚老师一开始说“下周的课考试”}) = 0.5$$

$$P(\text{曾凡晔收到“下周的课考试”的消息}) = 0.4 \times 0.5 + 0.6 \times 0.5 = 0.5$$

所以

$$P(\text{姚老师一开始说“下周的课考试”} \mid \text{曾凡晔收到“下周的课考试”的消息}) = \frac{0.5 \times 0.4}{0.5} = 0.4000$$

□

(2) 又设在上述传递消息的过程中, 第 10 位收到消息的是李墨涵同学, 计算条件概率

$$P(\text{姚老师一开始说“下周的课考试”} \mid \text{上述三位同学全都传出“下周的课考试”的消息}).$$

解：

设 A_i 表示事件“第 i 位同学传出‘下周的课考试’的消息”，A_0 表示事件“姚老师一开始说‘下周的课考试’”，再根据贝叶斯公式和条件概率的性质，则所求的问题可转换为

$$\begin{aligned}
P(A_0|A_1, A_{10}, A_{20}) &= \frac{P(A_1, A_{10}, A_{20}|A_0) \times P(A_0)}{P(A_1, A_{10}, A_{20})} \\
&= \frac{P(A_{20}|A_{10}, A_1, A_0)P(A_{10}|A_1, A_0)P(A_1|A_0)P(A_0)}{P(A_{20}|A_{10}, A_1)P(A_{10}|A_1)P(A_1)}
\end{aligned}$$

显然此模型是马氏链，所以根据马氏链的性质，

$$\begin{aligned}
\text{上式} &= \frac{P(A_{20}|A_{10})P(A_{10}|A_1)P(A_1|A_0)P(A_0)}{P(A_{20}|A_{10})P(A_{10}|A_1)P(A_1)} \\
&= \frac{P(A_1|A_0)P(A_0)}{P(A_1)} \qquad (= P(A_0|A_1)) \\
&= \frac{0.7\times 0.4}{0.4\times 0.7+0.6\times 0.3} \\
&= \frac{14}{23} \approx 0.6087
\end{aligned}$$

□

(要求答案均保留四位有效数字. 提示: 方阵的幂可用数学软件如 Matlab 计算.)

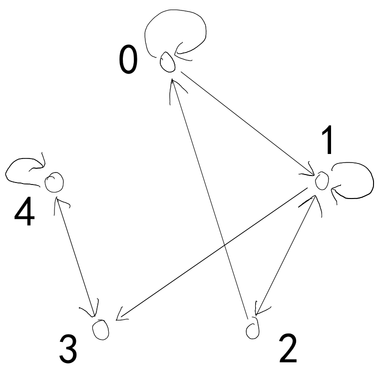
《随机过程》4 月 8 日作业

1. 设马氏链 X 的状态空间为 $S=\{0,1,2,3,4\}$，一步转移概率矩阵为

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

试写出状态空间 S 中的所有互通类，判断它们是否是本质类，并说明理由。

解：



首先画出示意图，之后即可看出互通类为

$$\{0,1,2\},\{3,4\}$$

其中由于 $1\to 3$ 而 $3\not\to 1$，所以 $\{0,1,2\}$ 不是本质类。

而 $3\to 4$ 且 $4\to 3$，所以 $\{3,4\}$ 是本质类。

□

2. 在马氏链中，假设 $i\leftrightarrow j$ 且它们的周期为 d。证明：若 $p_{ij}^{(n)}>0$ 且 $p_{ij}^{(m)}>0$，则必有 $d|(n-m)$。

证明：

由于 $i \leftrightarrow j$，则可设 $p_{ji}^{(x)} > 0$，所以

$$p_{ii}^{(n+x)} \geqslant p_{ij}^{(n)} p_{ji}^{(x)} > 0, \quad p_{ii}^{(m+x)} \geqslant p_{ij}^{(m)} p_{ji}^{(x)} > 0$$

又由于 i 的周期为 d，所以 $d|(n+x), d|(m+x)$，则根据整除的性质，有 $d|(n-m)$。 □

3. 证明：在马氏链中，若状态 j 非常返，则对任意状态 i，有 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$。

证明：

设状态空间为 S。因为状态 j 非常返，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$。

若 $j \to i$，则 $\exists m > 0$，s.t. $p_{ji}^{(m)} > 0$，所以

$$\infty > \sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} \geqslant \sum_{n=m}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \sum_{n=m}^{\infty} \sum_{k\in S}^{n} p_{jk}^{(m)} p_{kj}^{(n-m)} \geqslant \sum_{n=m}^{\infty} p_{ji}^{(m)} p_{ij}^{(n-m)} = p_{ji}^{(m)} \sum_{n=m}^{\infty} p_{ij}^{(n-m)}$$

因为 $p_{ji}^{(m)} > 0$，所以上式可化为 $\sum\limits_{n=m}^{\infty} p_{ij}^{(n-m)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} < \infty$。从而级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)}$ 收敛 $\Longrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$

若 $j \not\to i$，则不会了。 □

4. 证明：在马氏链中，若状态 j 为吸收态，则对任意状态 i，有 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = f_{ij}$。

证明：

由于 j 为吸收态，所以 $\forall i = 1, 2, \cdots, n$，$p_{jj}^{(i)} = 1$，所以

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} p_{jj}^{(n-k)} f_{ij}^{(k)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}^{(k)} = f_{ij}$$

□

5. 证明：元素有限的本质类必是常返类。

证明：

设本质类 $S = \{s_1, s_2, \cdots, s_n\}$，则对于 $\forall i = 1, 2, \cdots, n$，令 $S_i = \{s_j : p_{s_i s_j}^{(1)} > 0\}$（即把所有 s_i 一步可达的 s_j 都取出来组成 S_i）。由于 S 是本质类，所以当 $s_i \to s_j$ 时有 $s_j \to s_i$，设 $s_j \to s_i$ 的首次到达需要的步数为 m_j 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{s_i s_i}^{(n)} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s_j \in S_i} p_{s_i s_j}^{(1)} p_{s_j s_i}^{(m_j)}$$

由于 $\sum\limits_{s_j\in S_i} p_{s_is_j}^{(1)}p_{s_js_i}^{(m_j)}$ 有限且为定值，可以设为 ε $(\varepsilon>0)$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{s_is_i}^{(n)} \geqslant \lim_{n\to\infty} n\varepsilon = \infty$$

所以 S 是常返类。 □

6. 证明：平面格点上的简单对称随机游动（指每一步向四个方向挪动的概率都是 $\frac{1}{4}$，且各步独立）常返。

证明：

设 $\uparrow,\downarrow,\leftarrow,\rightarrow$ 分别表示向上下左右挪动一步，对于任意状态 i（即任意一个格点），

$$\begin{aligned}p_{ii}^{(4n+2)} &= p_{\uparrow}^{(1)}p_{\downarrow}^{(4n+1)} + p_{\rightarrow}^{(1)}p_{\leftarrow}^{(4n+1)} + p_{\downarrow}^{(1)}p_{\uparrow}^{(4n+1)} + p_{\leftarrow}^{(1)}p_{\rightarrow}^{(4n+1)} \\ &= \frac{1}{4}p_{\downarrow}^{(4n+1)} + \frac{1}{4}p_{\leftarrow}^{(4n+1)} + \frac{1}{4}p_{\uparrow}^{(4n+1)} + \frac{1}{4}p_{\rightarrow}^{(4n+1)}\end{aligned}$$

对于 $p_{\downarrow}^{(4n+1)}$，可以理解为向下挪动了 $n+1$ 步，向其它三个方向挪动了 n 步，所以 $p_{\downarrow}^{(4n+1)} = \mathrm{C}_{4n+1}^{n}\mathrm{C}_{3n+1}^{n}\mathrm{C}_{2n+1}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^{4n+1}$。$p_{\leftarrow}^{(4n+1)}, p_{\uparrow}^{(4n+1)}, p_{\rightarrow}^{(4n+1)}$ 同理。因此

$$\text{上式} = \frac{1}{4}\times 4\left(\mathrm{C}_{4n+1}^{n}\mathrm{C}_{3n+1}^{n}\mathrm{C}_{2n+1}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^{4n+1}\right)$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(4n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{C}_{4n+1}^{n}\mathrm{C}_{3n+1}^{n}\mathrm{C}_{2n+1}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^{4n+1} = \infty$$

所以状态 i 常返，从而任意一个格点均常返。 □

7. 设 $X=\{X_n : n\in\mathbb{N}\}$ 是不可约常返马氏链。对 $j\in S$，定义 $\tau_j^{(0)}=0$，并对 $k\in\mathbb{Z}^+$ 递归定义 $\tau_j^{(k)} = \inf\left\{n>\tau_j^{(k-1)} : X_n=j\right\}$。然后对 $k\in\mathbb{Z}^+$ 定义 $W_j^{(k)} = \tau_j^{(k)} - \tau_j^{(k-1)}$。证明：$\left\{W_j^{(k)} : k\in\mathbb{Z}^+\right\}$ 相互独立，且当 $k\geqslant 2$ 时分布相同。

证明：

设初始状态为 i，对于 $\forall k\geqslant 2$，

$$\begin{aligned}&P\left(W_j^{(k)}=y\right) = P\left(\tau_j^{(k)}-\tau_j^{(k-1)}=y\right) \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} P\left(\tau_j^{(k)}=x+y, \tau_j^{(k-1)}=x\right) \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} P\left(\tau_j^{(k)}=x+y \middle| \tau_j^{(k-1)}=x\right) P\left(\tau_j^{(k-1)}=x\right) \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} f_{jj}^{(y)} \sum_{x_1+x_2+\cdots+x_{k-1}=x} f_{ij}^{(x_1)}f_{jj}^{(x_2)}\cdots f_{jj}^{(x_{k-1})} \\ &= \sum_{x=0}^{\infty}\sum_{x_1+x_2+\cdots+x_{k-1}=x} f_{ij}^{(x_1)}f_{jj}^{(x_2)}\cdots f_{jj}^{(x_{k-1})}f_{jj}^{(y)}\end{aligned}$$

后面不会了。 □

8. 证明：在马氏链中，对任意 $i,j,k\in S$，有 $f_{ik}\geqslant f_{ij}f_{jk}$。

证明：

对任意 $i,j,k\in S$,

$$f_{ik}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{ik}^{(n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{a\in S}\sum_{b=1}^{n}p_{ia}^{(b)}f_{ak}^{(n-b)}$$

$$f_{ij}f_{jk}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}f_{ij}^{(n)}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}f_{jk}^{(n)}\right)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{a\in S}\sum_{b=1}^{n}p_{ia}^{(b)}f_{aj}^{(n-b)}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{a\in S}\sum_{b=1}^{n}f_{ja}^{(b)}f_{ak}^{(n-b)}\right)$$

实在是不会了。 □

练习题 3.3

1. 设 X 的状态空间为 $\{1,2,3\}$，转移概率矩阵为 $\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$，对任意 $n\geqslant 1$，求 $f_{1,2}^{(n)}$。

解：

$$\begin{cases}F_{12}(u)=p_{12}u+p_{11}uF_{12}(u)+p_{13}uF_{32}(u) & ①\\F_{22}(u)=p_{22}u+p_{21}uF_{12}(u)+p_{23}uF_{32}(u) & ②\\F_{32}(u)=p_{32}u+p_{31}uF_{12}(u)+p_{33}uF_{32}(u) & ③\end{cases}$$

由①和③可得

$$\begin{cases}F_{12}(u)=\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}uF_{32}(u)\\F_{32}(u)=\frac{1}{2}u+\frac{2}{3}uF_{32}(u)\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}F_{32}(u)=\frac{\frac{1}{2}u}{1-\frac{2}{3}u}\\F_{12}(u)=\frac{1}{2}u+\frac{\frac{1}{4}u^2}{1-\frac{2}{3}u}\end{cases}$$

所以

$$F_{12}(u)=\frac{1}{2}u+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4}u^2\left(\frac{2}{3}u\right)^{n-1}=\frac{1}{2}u+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}u^{n+1}=\frac{1}{2}u+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}u^n$$

综上，$f_{12}^{(1)}=\frac{1}{2}u,\quad f_{12}^{(n)}=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\ (n\geqslant 2)$。 □

2. 一个盗窃犯长期在 $A=1, B=2, C=3$ 三地流传作案, 治安部门调查后发现他每年作案次数服从强度为 3 的泊松分布, 而连续两次作案的地点变化服从转移概率矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 并且作案次数与作案地点无关。已知此人刚刚在 A 地作案, 试估计一年内他在 A 地再作案的概率。

解：

由题意可知，作案地点的变化为时齐马氏链，从而所求的概率为 $E_{k\sim\mathrm{Poi}(3)} f_{11}^{(k)}$。

$$\begin{cases} F_{11}(u) = uF_{31}(u) & ① \\ F_{21}(u) = \frac{1}{2}uF_{11}(u) + \frac{1}{2}u & ② \\ F_{31}(u) = uF_{21}(u) & ③ \end{cases}$$

由①③得 $F_{11}(u) = u^2F_{21}(u)$，代入②可得 $F_{21}(u) = \frac{1}{2}u^3F_{21}(u) + \frac{1}{2}u$，解得 $F_{21}(u) = \dfrac{\frac{1}{2}u}{1-\frac{1}{2}u^3}$，所以

$$F_{11}(u) = \frac{\frac{1}{2}u^3}{1-\frac{1}{2}u^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}u^3 \left(\frac{1}{2}u^3\right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n u^{3n}$$

令 $k=3n$，则 $f_{11}^{(k)} = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k}{3}}, & k=3n \\ 0, & k \neq 3n \end{cases}, n \in \mathbb{Z}^+, k \in \mathbb{Z}^+$，所以

$$E_{k\sim\mathrm{Poi}(3)} f_{11}^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{3^{3n}}{(3n)!}e^{-3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(3\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)^{3n}}{(3n)!}e^{-3} = e^{3\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}e^{-3} = e^{\frac{3}{\sqrt[3]{2}}-3}$$

□

3. 设 X 的状态空间为 $\{1,2,3\}$，转移概率矩阵为 $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$。求 $f_{3,2}$ 和 $m_{3,2}$。

解：

$$\begin{cases} f_{32} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}f_{32}, & ① \\ f_{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}f_{12}, & ② \\ f_{22} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}f_{12}, & ③ \end{cases} \qquad \begin{cases} m_{32} = f_{32} + \frac{2}{3}m_{32}, & ④ \\ m_{12} = f_{12} + \frac{1}{2}m_{22}, & ⑤ \\ m_{22} = f_{22} + \frac{2}{3}m_{12}, & ⑥ \end{cases}$$

由①可得 $f_{32}=1$，代入④可得 $m_{32}=3$。 □

4. 若一篇文稿有 n 个错误, 每次校阅至少能发现一个, 但留下来的错误数在 0 到 $n-1$ 之间等可能存在. 设原稿共有 a 个错误, 问为了改正全部错误平均需要校阅几次?

解：

设随机过程 X 表示在某个时刻留下来的错误数，则 X 是时齐马氏链，状态空间为 $\{1,2,\cdots,n-1\}$。X 的转移概率矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

所以

$$\begin{cases} f_{10}=1 \\ f_{20}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}f_{10}=1 \\ f_{30}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}f_{10}+\frac{1}{3}f_{20}=1 \\ \cdots \\ f_{n0}=\frac{1}{n}+\sum_{i=1}^{n}f_{i0}=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} m_{10}=f_{10} \\ m_{20}=f_{20}+\frac{1}{2}m_{10}=1+\frac{1}{2}\times 1=\frac{3}{2} \\ m_{30}=f_{30}+\frac{1}{3}m_{10}+\frac{1}{3}m_{20}=1+\frac{1}{3}\times 1+\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}=\frac{11}{6} \\ \cdots \\ m_{n0}=f_{n0}+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{n}m_{i0} \end{cases}$$

根据递推公式算出 m_{n0}（不会算通项公式了），将 a 代入，则可知为了改正全部错误平均需要校阅 m_{a0} 次。 □

6. (Ehrenfest 模型) 设一个坛子内装有红白两色共 N 个球，每次随机地从坛子中抽出一个球，把它换成另一种颜色后放回。以 X_n 表示经 n 次抽放后坛中的红球数，那么 $X=\{X_n\ ;\ n\geqslant 0\}$ 为时齐马氏链。若开始时坛内只有一个红球，问平均要抽放多少次才能使坛内全是白球?

解：

可以观察到 X 类似带反射壁的随机游动，但向中间收敛的概率更大，转移概率矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{N} & 0 & \frac{N-1}{N} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{N} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{N} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

开始时坛内只有一个红球，那么 $X_0=1$，使坛内全是白球即 $X_?=0$，所以所求的平均抽放次数为 m_{10}。

由于这是元素有限的本质类，从而一定是常返类，所以 $\forall i,j\in\{1,2,\cdots N\},f_{ij}=1$，所以

可以直接列出 m_{ij} 的方程组。

$$\begin{cases} m_{00} & = 1 + m_{10} \\ m_{10} & = 1 + \frac{N-1}{N} m_{20} + \frac{1}{N} m_{00} \\ m_{20} & = 1 + \frac{2}{N} m_{10} + \frac{N-2}{N} m_{30} \\ \cdots \\ m_{n-1,0} & = 1 + \frac{N-1}{N} m_{n-2,0} + \frac{1}{N} m_{n0} \\ m_{n0} & = 1 + m_{n-1,0} \end{cases}$$

写成矩阵的形式为

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\frac{1}{N} & 1 & -\frac{N-1}{N} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{N} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -\frac{1}{N} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{00} \\ m_{10} \\ m_{20} \\ \vdots \\ m_{n-1,0} \\ m_{n0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

解得 $m_{10} = \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{N} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right)(1,0)$ 即为使坛内全是白球的平均抽放次数。 □

补 (“赌徒输光模型”)考虑 $\{0,1,\cdots,N\}(N \geqslant 2)$ 上的 (q,p)-简单随机游动$(0<p,q<1,p+q=1)$，其中两个端点是“完全吸收壁”（即 $p_{00} = p_{NN} = 1$。对 $i \in \{1,\cdots,N-1\}$，计算 f_{i0}（即初始状态为 i 时的“输光”概率）。

解：由题意可知转移概率矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ q & 0 & p & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)}$$

则可以列出关于 f_{i0} 的方程组

$$\begin{cases} f_{00} = 1 \\ f_{10} = q f_{00} + p f_{20} \\ f_{20} = q f_{10} + p f_{30} \\ \cdots \\ f_{n-2,0} = q f_{n-3,0} + p f_{n-1,0} \\ f_{n-1,0} = q f_{n-2,0} + p f_{n0} \\ f_{n_0} = f_{n_0} & \text{（这一条方程可以去除，因为 } f_{n0} = 0\text{）} \end{cases}$$

写成矩阵的形式为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ q & -1 & p & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & q & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & p \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & q & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{00} \\ f_{10} \\ f_{20} \\ \vdots \\ f_{n-2,0} \\ f_{n-1,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

解得 $\begin{bmatrix} f_{00} & f_{10} & f_{20} & \cdots & f_{n-1,0} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \oplus [f_{n0}]$ 即为所求的 f_{i0}。(实在算不出来了) □

练习题 3.4

1. 对有限状态马氏链 X,证明 (1) X 没有状态零常返,(2) 若 X 不可约,那么 X 是正常返的。

证明:

假设状态 i 零常返,则 $f_{ii}=1, m_{ii}=+\infty$,又由于 $m_{ii}=f_{ii}+\sum_{j\neq i}p_{ij}f_{ji}$。根据性质 3.2.19,因为 i 常返且 $i\to j$,所以 $f_{ji}=1$,从而 $+\infty=1+\sum_{j\neq i}p_{ij}$,而 $\sum_{j\neq i}p_{ij}$ 为有限个有限的数求和,所以不可能为 $+\infty$,产生矛盾,所以状态 i 不是零常返,即 X 没有状态零常返。

若 X 不可约,则 X 是本质类,又因为 X 的状态有限,所以 X 是常返类;又因为 X 没有状态零常返,所以 X 是正常返的。 □

3. 设 X 是一个不可约非常返的马氏链,令

$$l_j=\sup\{n\geqslant 0, X_n=j, X_k\neq j, k>n\},$$

即 l_j 是 X 最后一次到达状态 j 的时间。假定 X 从 j 出发,求 l_j 的分布和均值。

解:

$$P(l_j=n)=P_j(X_n=j, X_k\neq j, \forall k>n)=p_{jj}^{(n)}\cdot\sum_{k\neq j}e_{jk}$$

$$E(l_j)=\sum_{n=1}^{\infty}nP(l_j=n)=\sum_{n=1}^{\infty}np_{jj}^{(n)}\sum_{k\neq j}e_{jk}$$

□

4. 设 X 的转移概率矩阵为 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,求 X 的平稳分布。

解：

设 $M=(\pi_1,\pi_2,\pi_3)$，P 为转移概率矩阵，则根据 $M=MP$ 以及 $\pi_1+\pi_2+\pi_3=1$ 可以列出方程组如下：

$$\begin{cases}\pi_1=\frac{1}{4}\pi_2\\ \pi_2=\pi_1+\frac{1}{2}\pi_2+\pi_3\\ \pi_3=\frac{1}{4}\pi_2\\ \pi_1+\pi_2+\pi_3=1\end{cases}$$

解得 $(\pi_1,\pi_2,\pi_3)=\left(\frac{1}{6},\frac{2}{3},\frac{1}{6}\right)$，此即为 X 的平稳分布。 □

5. 一个月后小明有两天假期, 他就打算只要假期里有一天的天气晴朗就出去旅行. 为此他查阅了气象资料, 发现每日天气晴朗 (0) 与非晴朗 (1) 之间的变化可以近似用时齐马氏链来刻画, 转移概率矩阵为 $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{4}&\frac{3}{4}\end{pmatrix}$。试估计小明能出去旅行的概率。

解：

设这两天假期的天气为 X_0 和 X_1，状态空间为 $S=\{0,1\}$，则小明能出去旅行的概率为

$$\begin{aligned}P(X_0=0)+P(X_0=1,X_1=0)&=P(X_0=0)+P(X_0=1)P(X_1=0|X_0=1)\\&=P(X_0=0)+P(X_0=1)p_{10}\end{aligned}$$

由于每日天气之间的变化可以近似用时齐马氏链来刻画，且天气是一个稳定的系统，所以可以认为天气的初始分布为平稳分布，即 $P(X_0=0)$ 和 $P(X_0=1)$ 可以使用平稳分布的概率来计算。

设 $M=(\pi_1,\pi_2)$，P 为转移概率矩阵，则根据 $M=MP$ 以及 $\pi_1+\pi_2=1$ 可以列出方程组如下：

$$\begin{cases}\pi_0=\frac{1}{2}\pi_0+\frac{1}{4}\pi_1\\ \pi_1=\frac{1}{2}\pi_0+\frac{3}{4}\pi_1\\ \pi_0+\pi_1=1\end{cases}$$

解得 $(\pi_0,\pi_1)=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$，此即为天气的平稳分布，所以 $P(X_0=0)=\frac{1}{3}$, $P(X_0=1)=\frac{2}{3}$，所以小明能出去旅行的概率为 $\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$。 □

6. 某人有 M 把伞并在办公室和家之间往返：出门上班时下雨并家里有伞就带把伞去办公室；下班回家时下雨且办公室有伞就带把伞回家。其它时候都不带伞。假设每天上下班时是否下雨是独立同分布的，下雨的概率为 p，不下雨的概率为 $1-p$，问此人出门上班时碰到下雨且没有雨伞的概率。

解：

设 $X=\{X_i\ :\ i\in\mathbb{Z}\}$ 表示某天上班之前家里的伞的数量，则显然 X 是时齐马氏链。为了求出转移概率矩阵，可以梳理出下表：

上班	下雨		不下雨	
下班	下雨	不下雨	下雨	不下雨
概率	p^2	$p(1-p)$	$p(1-p)$	$(1-p)^2$
X 的变化	0	-1	$+1$	0

需要注意的是，0 和 M 为 X 的边界，即当 $X=0$ 时不能再减少，当 $X=M$ 时不能再增加，所以转移概率矩阵为：

$$P=\begin{bmatrix}1-p+p^2 & p(1-p) & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ p(1-p) & p^2+(1-p)^2 & p(1-p) & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & p(1-p) & p^2+(1-p)^2 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p^2+(1-p)^2 & p(1-p) & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p(1-p) & p^2+(1-p)^2 & p(1-p)\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p(1-p) & 1-p+p^2\end{bmatrix}$$

根据 $\begin{bmatrix}\pi_0 & \pi_1 & \cdots & \pi_M\end{bmatrix}P=\begin{bmatrix}\pi_0 & \pi_1 & \cdots & \pi_M\end{bmatrix}$ 以及 $\pi_0+\pi_1+\cdots+\pi_M=1$ 可以解得

$$\pi_0=\pi_1=\cdots=\pi_M=\frac{1}{M+1}$$

(直观上这么复杂的一个系统，竟然处于任何一个状态的概率都是相同的!)

此即为 X 的平稳分布，所以 $P(X=0)=\dfrac{1}{M+1}$。

$$P(\text{此人出门上班时碰到下雨且没有雨伞})=pP(X=0)=\frac{p}{M+1}$$

□

7. 设 X 的状态空间 $S=\mathbb{N}$, 对任意 $n\geqslant 0$, 转移概率 $p_{n,n+1}=p_n$, $p_{n,0}=1-p_n$, 其中 $p_n\in(0,1)$。求

(1) 能保证 0 是常返状态的条件;

解：

只需要考虑 $f_{00}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{00}^{(n)}=1$ 的条件。由于

$$\begin{cases}f_{00}^{(1)}=p_{00}=1-p_0\\ f_{00}^{(2)}=p_{01}p_{10}=p_0(1-p_1)=p_0-p_0p_1\\ f_{00}^{(3)}=p_{01}p_{12}p_{20}=p_0p_1(1-p_2)=p_0p_1-p_0p_1p_2\\ \cdots\end{cases}$$

所以 $\displaystyle\sum_{n=0}^{m}f_{00}^{(n)}=1-\prod_{n=0}^{m-1}p_i$，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}f_{00}^{(n)}=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m}f_{00}^{(n)}=\lim_{m\to\infty}\left(1-\prod_{n=0}^{m-1}p_i\right)=1$，所以能保证 0 是常返状态的条件为

$$\prod_{n=0}^{\infty}p_i=0,\quad \text{即}\ p_0p_1p_2\cdots=0$$

□

(2) 能保证 0 是正常返状态的条件;

解：

0 是正常返状态即 $m_{00}<\infty$，所以

$$\begin{cases} m_{00}=1+p_0m_{10}<\infty \implies p_0=0\text{或}m_{10}<\infty \\ m_{10}=1+p_1m_{20}<\infty \implies p_1=0\text{或}m_{20}<\infty \\ m_{20}=1+p_2m_{30}<\infty \implies p_2=0\text{或}m_{30}<\infty \\ \cdots \end{cases}$$

所以能保证 0 是正常返状态的条件为 $\exists n_0\in\mathbb{N},\ \text{s.t. } p_{n_0}=0$。也就是当 $p_0,p_1,p_2,\cdots$ 中首次出现 0 的时候，在这个 0 前面的部分构成有限状态的本质类，从而构成正常返类，从而 0 是正常返状态。 □

(3) 平稳分布。

解：

转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} 1-p_0 & p_0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1-p_1 & 0 & p_1 & 0 & \cdots \\ 1-p_2 & 0 & 0 & p_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

根据 $\begin{bmatrix}\pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \cdots\end{bmatrix}P=\begin{bmatrix}\pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \cdots\end{bmatrix}$ 以及 $\pi_0+\pi_1+\pi_2+\cdots=1$ 可以解得

$$\begin{cases} \pi_0=\frac{1}{1+p_0+p_0p_1+p_0p_1p_2+\cdots} \\ \pi_1=\frac{p_0}{1+p_0+p_0p_1+p_0p_1p_2+\cdots} \\ \pi_2=\frac{p_0p_1}{1+p_0+p_0p_1+p_0p_1p_2+\cdots} \\ \cdots \end{cases}$$

即 $\forall i\in\mathbb{N},\ \pi_i=\dfrac{\prod_{j=1}^{i}p_i}{\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{n}p_i}$，此即为 X 的平稳分布。 □

8. 设 X 的转移概率满足：对任意 $i,j\in S=\mathbb{N}, p_{i,i}=\lambda_i+(1-\lambda_i)u_i$；而 $i\neq j$ 时，$p_{i,j}=(1-\lambda_i)u_j$，其中 $u_j>0,\ \sum\limits_{j=0}^{\infty}u_j=1, 0<\lambda_i<1$。证明

(1) X 是常返的;

证明：

首先写出转移概率矩阵：

$$P=\begin{bmatrix}\lambda_0+(1-\lambda_0)u_0 & (1-\lambda_0)u_1 & (1-\lambda_0)u_2 & \cdots\\ (1-\lambda_1)u_0 & \lambda_1+(1-\lambda_1)u_1 & (1-\lambda_1)u_2 & \cdots\\ (1-\lambda_2)u_0 & (1-\lambda_2)u_1 & \lambda_2+(1-\lambda_2)u_2 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\end{bmatrix}$$

观察后可以发现

$$P=\begin{bmatrix}1-\lambda_0\\1-\lambda_1\\1-\lambda_2\\ \vdots\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_0 & u_1 & u_2 & \cdots\end{bmatrix}+\operatorname{diag}(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\cdots)$$

所以 $\forall i\in\mathbb{N},p_{ii}^{(n)}=P^n(i,i)$，计算后可以发现 $n\to\infty$ 时，$p_{ii}^{(n)}$ 不以 0 为极限，所以 i 常返，从而 X 是常返的。 □

(2) X 是正常返当且仅当 $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}\frac{u_i}{1-\lambda_i}<\infty$。

证明：

$\forall i\in\mathbb{N}$，由于 X 常返，所以 $f_{ii}=1$，从而有

$$\begin{aligned}X_i\text{正常返}\iff & m_{ii}=f_{ii}+\sum_{j\neq i}p_{ij}m_{ji}=1+\sum_{j\neq i}(1-\lambda_i)u_jm_{ji}<\infty\\ \iff & \forall j\in\mathbb{N},(1-\lambda_i)u_j<\infty\end{aligned}$$

对 i 求和可知上式 $\iff\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}\frac{u_i}{1-\lambda_i}<\infty$，因此 X 是正常返当且仅当 $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}\frac{u_i}{1-\lambda_i}<\infty$。

□

10. 设不可约正常返马氏链 X 的转移概率矩阵为 $(p_{i,j})_{i,j\in S}$，$\pi=(\pi_i,i\in S)$ 为平稳分布。令 $Y_n=(X_n,X_{n+1})$。证明 $Y=\{Y_n;\ n\geqslant 0\}$ 是状态空间为 $\mathcal{M}=\{(i,j);\ i,j\in S,p_{i,j}>0\}$ 的不可约正常返马氏链，平稳分布为 $(\pi_ip_{i,j},(i,j)\in\mathcal{M})$。

证明：

因为 X 是不可约正常返马氏链，所以 $\forall i,j,k,l\in S$且满足$p_{ij}>0,p_{kl}>0$(即 $\forall(i,j),(k,l)\in\mathcal{M}$)，$\exists n_0\in\mathbb{N}$，s.t. $p_{ik}^{(n_0)}>0$，从而

$$p_{(i,j)(k,l)}^{(n_0)}=p_{ik}^{(n_0)}p_{kl}>0$$

即 Y 的任意两个状态都可互通，所以 Y 是不可约的。

因为 X 是正常返的，所以对于 $\forall(i,j)\in\mathcal{M}$， $\sum_{n=1}^{\infty}p_{ii}^{(n)}<\infty$，所以

$$p_{(i,j)(i,j)}^{(n)}=p_{ii}^{(n)}p_{ij} \implies \sum_{n=1}^{\infty}p_{(i,j)(i,j)}^{(n)}=\sum_{n=1}^{\infty}p_{ii}^{(n)}p_{ij}<\infty$$

所以 Y 是正常返的。

因为 $\pi=(\pi_i,i\in S)$ 为 X 的平稳分布，所以对于 $\forall(i,j),(j,k)\in\mathcal{M}$，$\pi_i p_{ij}=\pi_j$，所以

$$\pi_i p_{ij} p_{(i,j)(j,k)}=\pi_i p_{ij} p_{jk}=\pi_j p_{jk}$$

所以 $(\pi_i p_{ij},(i,j)\in\mathcal{M})$ 为 Y 的平稳分布。 □

第四章　马氏链应用模型

练习题 4.1

2. 总共 m 个白球和 m 个黑球分别放在 A,B 两个坛子中，每个坛子有 m 个球，每次从这两个坛子中各随机地取一个球并把它们交换后放回。以 X_n 表示经过 n 次后 A 坛中黑球个数。求 X_n 的平稳分布。

解：

当 $X=i$ 时，此时的球的数量为

	A	B
黑	i	$m-i$
白	$m-i$	i

则下一时刻的情况为

	A 黑 B 黑	A 白 B 白	A 黑 B 白	A 白 B 黑
概率	$\frac{i(m-i)}{m^2}$	$\frac{i(m-i)}{m^2}$	$\frac{i^2}{m^2}$	$\frac{(m-i)^2}{m^2}$
X 的变化	0	0	-1	$+1$

所以一步转移概率为 $p_{i,i-1}=\frac{i^2}{m^2}$, $p_{i,i+1}=\frac{(m-i)^2}{m^2}$, $p_{ii}=\frac{2i(m-i)}{m^2}$。

根据细致平衡条件，$\pi_i p_{i,i-1}=\pi_{i-1}p_{i-1,i}$，可得 $\pi_i\frac{i^2}{m^2}=\frac{(m-i+1)^2}{m^2}\pi_{i-1}$，所以 $\frac{\pi_i}{\pi_{i-1}}=\frac{(m-i+1)^2}{i^2}$。所以

$$\pi_j=\pi_0\prod_{i=0}^{j}\frac{\pi_i}{\pi_{i-1}}=\pi_0\prod_{i=0}^{j}\frac{(m-i+1)^2}{i^2}=\pi_0\left(\mathrm{C}_m^j\right)^2$$

根据

$$\sum_{j=0}^{m}\left(\mathrm{C}_m^j\right)^2\pi_0=1$$

可得 $\pi_0=\frac{1}{\sum_{j=0}^{m}\left(\mathrm{C}_m^j\right)^2}$，所以 $\pi_j=\frac{\left(\mathrm{C}_m^j\right)^2}{\sum_{j=0}^{m}\left(\mathrm{C}_m^j\right)^2}$。所以 X_n 的平稳分布为

$$\left\{\frac{\left(\mathrm{C}_m^j\right)^2}{\sum_{j=0}^{m}\left(\mathrm{C}_m^j\right)^2}\,\middle|\,j=0,1,\cdots,m\right\}$$

□

3. 证明当 $q>p$ 时带一个反射壁的简单随机游动是可逆的，并由此求 m_{00}。

证明：

题目中只交代了带一个反射壁，没说反射壁在左侧还是右侧，根据后面要求的 m_{00} 来看，这里就认为在 0 的左侧吧。首先写出转移概率 $p_{01}=1, \forall i \in \mathbb{N}^{+}, p_{i,i+1}=p, p_{i,i-1}=p$。根据细致平衡条件，$\pi_i p_{i,i+1}=\pi_{i+1}p_{i+1,i}$，所以

$$\pi_1 q=\pi_0\cdot 1, \qquad \forall i \in \mathbb{N}^{+}, \pi_i p=\pi_{i+1}q$$

所以

$$\pi_0=\pi_1 q, \qquad \forall i \in \mathbb{N}^{+}, \pi_{i+1}=\frac{p}{q}\pi_i$$

所以 $\forall j \in \mathbb{N}^{+}, \pi_j=\pi_1\prod_{i=1}^{j-1}\frac{p}{q}$，再根据 $\sum_{j=0}^{\infty}\pi_j=1$ 可得

$$1=\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{p}{q}\right)^{j-1}+q\right)\pi_1=\left(\frac{1}{1-\frac{p}{q}}+q\right)\pi_1=\frac{q^2-pq+q}{q-p}\pi_1$$

所以 $\pi_1=\dfrac{q-p}{q^2-qp+q}$，$\pi_0=\pi_1 q=\dfrac{q-p}{q-p+1}$。所以 $m_{00}=\dfrac{1}{\pi_0}=\dfrac{q-p+1}{q-p}$。 □

4. 若 X 的转移概率矩阵为 $(p_{i,j})$，$\pi=(\pi_i, i\in S)$ 是 X 的可逆分布。证明对任意 $n\geqslant 1$，$\pi_i p_{ij}^{(n)}=\pi_j p_{ji}^{(n)}$。

证明：

对 n 进行数学归纳法，当 $n=1$ 时，由于 pi 是 X 的可逆分布，根据可逆分布的定义可知成立。

当 $n>1$ 时，假设 $n-1$ 时结论成立，即 $\pi_i p_{ij}^{(n-1)}=\pi_j p_{ji}^{(n-1)}$，则对于 n，

$$\begin{aligned}\pi_i p_{ij}^{(n)}&=\pi_i\sum_{k\in S}p_{ik}^{(n-1)}p_{kj}=\sum_{k\in S}\pi_i p_{ik}^{(n-1)}p_{kj}=\sum_{k\in S}\pi_k p_{ki}^{(n-1)}p_{kj}\\&=\sum_{k\in S}\pi_k p_{kj}p_{ki}^{(n-1)}=\sum_{k\in S}\pi_j p_{jk}p_{ki}^{(n-1)}=\pi_j p_{ji}^{(n)}\end{aligned}$$

所以对任意 $n\geqslant 1$，$\pi_i p_{ij}^{(n)}=\pi_j p_{ji}^{(n)}$。 □

5. 设不可约马氏链 X 的转移概率矩阵 $\mathbf{P}$ 是双随机的，即每行元素之和为 1，每列元素之和也为 1。证明

(1) X 是正常返的当且仅当 X 是有限状态马氏链；

证明：

“$\Longleftarrow$”：由于 P 是双随机的，且状态有限，所以离散均匀分布为 X 的平稳分布，又因为 X 不可约，所以 X 是正常返的。

“$\Longrightarrow$”：由于 X 是正常返的，所以 X 存在唯一的平稳分布。由于 P 是双随机的，所以 $(1,1,1,\cdots)$ 是一个不变测度。又因为平稳分布是不变测度的倍数且唯一，即 $\exists a>0,\ \text{s.t.}\ (a,a,a,\cdots)$ 是平稳分布，所以 $a+a+a+\cdots=1$，所以 X 一定是有限状态马氏链。 □

(2) X 是可逆的当且仅当 $\mathbf{P}$ 是有限阶的对称矩阵。

证明：

“$\Longleftarrow$”：由于 P 是有限阶的对称矩阵，设为 n 阶，即 $P=(p_{ij})_{n\times n}$，则 $\forall i,j=1,2,\cdots,n$，$p_{ij}=p_{ji}$，所以当 $\pi=(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\cdots,\frac{1}{n})$ 时，$\pi_i p_{ij}=\pi_j p_{ji}$，即 π 满足细致平衡条件，从而 π 是 X 的可逆分布，所以 X 是可逆的。

“$\Longrightarrow$”：因为 X 是可逆的且不可约，所以 X 正常返，根据上一小题的结论，X 状态有限（设为 n 个状态），且平稳分布为 $\pi=(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\cdots,\frac{1}{n})$。根据细致平衡条件有 $\forall i,j=1,2,\cdots,\pi_i p_{ij}=\pi_j p_{ji}$，又因为 $\pi_i=\pi_j$，所以 $p_{ij}=p_{ji}$，即 P 是有限阶的对称矩阵。 □

6. 若对任意 $i,j\in S$，$p_{ij}>0$，那么以 $(p_{i,j})_{i,j\in S}$ 为转移概率矩阵的正常返马氏链是可逆的当且仅当对任意的 $i,j,k\in S$，$p_{ij}p_{jk}p_{ki}=p_{ik}p_{kj}p_{ji}$。

证明：

“$\Longrightarrow$”：根据定理 4.1.4，从任意一状态触发回到改状态的路径与它的反向路径有相同的概率，所以 $p_{ij}p_{jk}p_{ki}=p_{ik}p_{kj}p_{ji}$。

“$\Longleftarrow$”： □

8. 给定整数 $N>1$。设 $X=\{X_n\ :\ n=0,1,\cdots,N\}$ 是转移概率矩阵为 $P=(p_{ij})_{i,j\in S}$ 的时齐马氏链。对任意 $n=0,1,\cdots,N$，定义 $Y_n=X_{N-n}$。

(1) 证明：$Y=\{Y_n\ :\ n=0,1,\cdots,N\}$ 是马氏链，但未必时齐。

证明：

$$
\begin{aligned}
&\forall n=0,1,\cdots,N-1, \quad i_0,i_1,\cdots i_N\in S,\\
&P(Y_{n+1}=i_{n+1}|Y_n=i_n,\cdots,Y_0=0)\\
=&P(X_{N-n-1}=i_{n+1}|X_{N-n}=n,\cdots,X_N=0)\\
=&\frac{P(X_{N-n-1}=i_{n+1},X_{N-n}=i_n,\cdots,X_N=0)}{P(X_{N-n}=i_n,\cdots,X_N=0)}\\
=&\frac{P(X_{N-n-1}=i_{n+1})P(X_{N-n}=i_n|X_{N-n-1}=i_{n+1})\cdots P(X_N=i_0|X_{N-1}=i_1)}{P(X_{N-n}=i_{N-n})P(X_{N-n+1}=i_{n-1}|X_{N-n}=i_n)\cdots P(X_N=i_0|X_{N-1}=i_1)}\\
=&\frac{P(X_{N-n-1}=i_{n+1})P(X_{N-n}=i_n|X_{N-n-1}=i_{n+1})}{P(X_{N-n}=i_n)}\\
=&P(X_{N-n-1}=i_{n+1}|X_{N-n}=i_n)\\
=&P(Y_{n+1}=i_{n+1}|Y_n=i_n)
\end{aligned}
$$

所以 Y 是马氏链，但未必时齐。 □

(2) 证明：当 X 的初始分布是 X 的平稳分布时，Y 是时齐马氏链。并写出 Y 的一步转移概率。

证明：

设 X 的平稳分布为 $\pi=\{\pi_i;\ i\in S\}$，则

$$p'_{ij}=P(Y_{n+1}=j|Y_n=i)=\frac{P(X_{N-n-1}=j)P(X_{N-n}=i|X_{N-n-1}=j)}{P(X_{N-n}=i)}=\frac{\pi_j p_{ji}}{\pi_i}$$

这就是 Y 的一步转移概率，并且与 n 无关，所以 Y 是时齐马氏链。 □

(3) 证明：当 X 的初始分布是 X 的可逆分布时，两个过程 X 与 Y 同分布。

证明：

设 X 的初始分布是 μ，也是 X 的可逆分布。由于 X 的可逆分布必定是 X 的平稳分布，所以由上一小题，$p'_{ij}=\dfrac{\mu_j p_{ji}}{\mu_i}=\dfrac{\mu_i p_{ij}}{\mu_i}=p_{ij}$，所以 Y 的一步转移概率与 X 相同，所以 X 与 Y 同分布。 □

练习题 4.2

1. 设 $\{(X_n,Y_n);\ n\geqslant 0\}$ 是隐马氏链，其中 $\{X_n;\ n\geqslant 0\}$, $\{Y_n;\ n\geqslant 0\}$ 分别是状态序列和观察序列，证明对任意 $n\geqslant 0$ $m\geqslant 1$,

$$
\begin{aligned}
&P\left(Y_{n+k}=j_{n+k},1\leqslant k\leqslant m|X_n=i,Y_l=j_l,0\leqslant l\leqslant n\right)\\
=&P\left(Y_{n+k}=j_{n+k},1\leqslant k\leqslant m|X_n=i\right)
\end{aligned}
$$

证明：

设状态空间为 S，转移概率矩阵为 (p_{ij})，观测概率矩阵为 (q_{jk})，则

$$\begin{aligned}&P\left(Y_{n+k}=j_{n+k},1\leqslant k\leqslant m|X_n=i,Y_l=j_l,0\leqslant l\leqslant n\right)\\=&\sum_{x\in S}p_{i,x}^{(k)}q_{x,j_{n+k}}\\=&P\left(Y_{n+k}=j_{n+k},1\leqslant k\leqslant m|X_n=i\right)\end{aligned}$$

□

2. 假设例 4.2.1 中产品的质量分为 1（合格）和 0（不合格）。在机器状态为 1 时，产品质量为 0,1 的概率分别为 0.05,0.95，而在机器状态为 2 时，产品质量为 0,1 的概率分别为 0.5,0.5。假设在产品检测的间隔时间内机器状态转移概率为

$$p_{1,1}=0.9,\ p_{1,2}=0.1,\ p_{2,1}=0,p_{2,2}=1$$

若初始机器状态为 1，求第 4 次检测才首次检测到不合格产品的概率并在此条件下计算第 5 次抽到合格品的概率。

解：

设状态序列为 X，观测序列为 Y，则 $Z=(X,Y)$ 构成隐马尔科夫过程，初始状态 $X_0=1$。由题意可得

P	1	2
1	0.9	0.1
2	0	1

Q	0	1
1	0.05	0.95
2	0.5	0.5

π	1	2
P	0.9	0.1

第 4 次检测才首次检测到不合格产品即观测序列为 1110。由于 $p_{2,1}=0$，所以可以直接不考虑状态序列的 2 后跟着 1 的情况。所以计算的概率如下表所示：

X \ Y	1110
1111	$0.9\times0.95\times0.9\times0.95\times0.9\times0.95\times0.9\times0.05=0.028126186875$
1112	$0.9\times0.95\times0.9\times0.95\times0.9\times0.95\times0.1\times0.5=0.03125131875$
1122	$0.9\times0.95\times0.9\times0.95\times0.1\times0.5\times1\times0.5=0.018275625$
1222	$0.9\times0.95\times0.1\times0.5\times1\times0.5\times1\times0.5=0.0106875$
2222	$0.1\times0.5\times1\times0.5\times1\times0.5\times1\times0.5=0.00625$
$\sum$	$0.028126186875+0.03125131875+0.018275625+0.0106875+0.00625=0.094590630625$

所以第 4 次检测才首次检测到不合格产品的概率为 **0.094590630625**。

在此条件下计算第 5 次抽到合格品的概率，则根据马氏链的性质，先计算

$$P(X_4=1)=0.028126186875$$

$$P(X_4=2)=0.03125131875+0.018275625+0.0106875+0.00625=0.06646444375$$

则从第 4 次开始计算，初始分布变为

π	1	2
P	0.028126186875	0.06646444375

所以可以继续计算第 4 和第 5 步的概率 (由于已经确定了 $Y_4 = 0$, 所以不需要乘 $q_{1,0}$ 或 $q_{2,0}$):

X \ Y	01
11	$0.028126186875 \times 0.9 \times 0.95 = 0.024047889778125$
12	$0.028126186875 \times 0.1 \times 0.5 = 0.00140630934375$
22	$0.06646444375 \times 1 \times 0.5 = 0.033232221875$
$\sum$	$0.024047889778125 + 0.00140630934375 + 0.033232221875 = 0.058686420996875$

所以在此条件下第 5 次抽到合格品的概率为 **0.058686420996875**。 □

4. 在例 4.2.5 设定下，若前 3 天价格波动恰为 $Y_0 = 1, Y_1 = 0, Y_2 = -1$，求 X_2 的分布，并预测 X_3 最可能的取值。

解：

已知 $Z_n = (X_n, Y_n)$ 为隐马氏链，

P	-1	1
-1	0.75	0.25
1	0.2	0.8

Q	-1	0	1
-1	0.6	0.2	0.2
1	0.2	0.3	0.5

π	-1	1
P	0.2	0.1

将 X_0, X_1, X_2 的取值分情况讨论，得下表：

(a,b,c)	$\mathrm{P}(\mathrm{X}_0 = a, Y_0 = 1, X_1 = b, Y_1 = 0, X_2 = c, Y_2 = -1)$
(1,1,1)	$0.8 \times 0.5 \times 0.8 \times 0.3 \times 0.8 \times 0.2 = 0.01536$
(1,1,-1)	$0.8 \times 0.5 \times 0.8 \times 0.3 \times 0.2 \times 0.6 = 0.01152$
(1,-1,1)	$0.8 \times 0.5 \times 0.2 \times 0.2 \times 0.25 \times 0.2 = 0.0008$
(1,-1,-1)	$0.8 \times 0.5 \times 0.2 \times 0.2 \times 0.75 \times 0.6 = 0.0072$
(-1,1,1)	$0.2 \times 0.2 \times 0.25 \times 0.3 \times 0.8 \times 0.2 = 0.00048$
(-1,1,-1)	$0.2 \times 0.2 \times 0.25 \times 0.3 \times 0.2 \times 0.6 = 0.00036$
(-1,-1,1)	$0.2 \times 0.2 \times 0.75 \times 0.2 \times 0.25 \times 0.2 = 0.0003$
(-1,-1,-1)	$0.2 \times 0.2 \times 0.75 \times 0.2 \times 0.75 \times 0.6 = 0.0027$

将 X_2 的情况提取出来可以计算得

$$P(Y_0 = 1, Y_1 = 0, X_2 = 1, Y_2 = -1) = 0.01536 + 0.0008 + 0.00048 + 0.0003 = 0.01694$$

$$P(Y_0 = 1, Y_1 = 0, X_2 = -1, Y_2 = -1) = 0.01152 + 0.0072 + 0.00036 + 0.0027 = 0.02178$$

所以

$$P(\mathbf{X_2 = 1} | Y_0 = -1, Y_1 = 0, Y_2 = -1) = \frac{P(Y_0 = 1, Y_1 = 0, X_2 = 1, Y_2 = -1)}{P(Y_0 = -1, Y_1 = 0, Y_2 = -1)}$$

$$= \frac{0.01694}{0.01694 + 0.02178} = \mathbf{0.4375}$$

所以 $P(\mathbf{X_2}=\mathbf{-1}|Y_0=1,Y_1=0,Y_2=-1)=1-0.4375=\mathbf{0.5625}$。
即为 X_2 的分布。

令 $P'(\cdot)=P(\cdot|Y_0=1,Y_1=0,Y_2=-1)$，则由于 X_n 是马氏链，可得

$$P'(X_3=1)=P'(X_2=1)p_{1,1}+P'(X_2=-1)p_{-1,1}=0.4375\times 0.8+0.5625\times 0.25=0.490625$$

$$P'(X_3=-1)=P'(X_2=1)p_{1,-1}P'(X_2=-1)p_{-1,-1}=0.4375\times 0.2+0.5625\times 0.75=0.509375$$

所以 X_3 最可能的取值为 $\mathbf{-1}$。 □

练习题 4.3

2. 证明，只要 $\eta_1<1$，Galton-Watson 过程所有非零状态都是非常返的。

证明：

根据 η_0 的情况分类讨论，当 $\eta_0>0$ 时，则对于任意状态 $i\in\mathbb{N}^+$，$i\to 0$ 但 $0\not\to i$（0 是吸收态），所以 i 非常返。

当 $\eta_0=0$ 时，则 $\forall n\in\mathbb{N}$，$X_{n+1}\geqslant X_n$（所有个体都至少产生一个后代），则当 $j>i$ 时 $p_{ji}=0$，$f_{ji}=0$，所以对于状态 $i\in\mathbb{N}^+$，

$$f_{ii}=p_{ii}+\sum_{j=i+1}^{\infty}p_{ij}f_{ji}=p_{ii}$$

设 Y_k 表示服从后代分布的随机变量，则

$$p_{ii}=P\left(\sum_{k=1}^{i}Y_k=i\right)=P(Y_k=1,\ k=1,2,\cdots,i)=(\eta_1)^i<1$$

所以 $f_{ii}<1$，即 i 非常返。 □

3. 假设在红细胞培养试验中红细胞的生存时间是 1 分钟，一个红细胞死亡时以 1/4 的概率生成两个红细胞，以 2/3 的概率产生一个红细胞一个白细胞，以 1/12 的概率产生两个白细胞，白细胞死亡后不会再生。再生的红细胞又按前面的概率再生，且彼此互不干扰。初始时只有一个红细胞。

(1) 求在 $n+0.5$ 分钟的培养过程中都没有白细胞的概率。

解：

设 $X=\{X_n;\ n\geqslant 0\}$ 为在第 $n+0.5$ 分钟的时刻红细胞的数量，则 X 是 G-W 分支过程，后代分布为 $\eta=(\eta_0=\frac{1}{12},\eta_1=\frac{2}{3},\eta_2=\frac{1}{4})$。因为每一时刻的白细胞都由上一时刻的红细胞产生，所以在 $n+0.5$ 分钟的培养过程中都没有白细胞也即在 $n-1+0.5$ 分

钟的培养过程中产生的所有红细胞死亡时都没有产生白细胞，那么这些红细胞死亡时都产生了两个红细胞，所以所求的概率为

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{4}\right)^{\left(2^k\right)} = 2^{4-2^{n+1}}$$

□

(2) 在整个细胞培养过程中，细胞最终灭绝。求该现象发生的概率。

解：

由于白细胞死亡后不会再生，所以只需要考虑红细胞的灭绝概率，即分支过程 X 的灭绝概率。后代分布的概率母函数为 $\eta(s)=\frac{1}{4}s^2+\frac{2}{3}s+\frac{1}{12}$，解 $\eta(s)=s$ 得：$s_1=\frac{1}{3}, s_2=1$。所以该分支过程的灭绝概率为 $\mathbf{\frac{1}{3}}$。 □

4. 假设分支过程 X 的初值为 $m\geqslant 1$，后代分布的概率母函数为 $\eta(s)=1-p+ps$，其中 $0<p<1$，求该分支过程灭绝时间的分布。

解：

初值为 1 时，$\forall n\in\mathbb{N}$，设 X_n 的概率母函数为 Φ_n，则 $\Phi_{n+1}(s)=1-p+p\Phi_n(s)$，所以 $\Phi_{n+1}(s)-1=p(\Phi_n(s)-1)$，$\Phi(s)=\eta(s)=1-p+ps$。所以 $\Phi_n(s)=p^n(s-1)+1$。

初值为 $m\geqslant 1$ 时，由于初始分布中的个体互相独立，所以整个分支过程灭绝相当于初始的每个个体所在的分支都灭绝，则 $P_m(\tau_0\leqslant k)=[P_1(\tau_0\leqslant k)]^m=[\Phi_k(0)]^m$，从而

$$\boldsymbol{\forall k\geqslant 1,\ P_m(\tau_0=k)} = P_m(\tau_0\leqslant k)-P_m(\tau_0\leqslant k-1) \boldsymbol{= \left(1-p^k\right)^m-\left(1-p^{k-1}\right)^m}$$

此即为该分支过程灭绝时间的分布。 □

5. 已知分支过程 X 的后代分布概率母函数 $\eta(s)=1/(3-2s)$，而且 $X_0=k$，求在过程灭绝条件下存活过的粒子平均数。

解：

当 $X_0=1$ 时在过程灭绝条件下存活过的粒子平均数为 $\frac{1}{1-\eta'(q)}$，那么当 $X_0=k$ 时，由于各初始个体互相独立地产生后代，所以在过程灭绝条件下存活过的粒子平均数为 $\frac{k}{1-\eta'(q)}$。

由 $\eta(s)=\frac{1}{3-2s}=s$ 可解得 $s_1=\frac{1}{2}$，$s_2=1$，所以灭绝概率 $q=\frac{1}{2}$，所以 $\eta'(q)=\frac{2}{(3-2q)^2}=\frac{1}{2}$，所以在过程灭绝条件下存活过的粒子平均数为

$$E\left(\sum_{i=0}^{\infty}X_i\middle|\tau_0<\infty\right)=\frac{k}{1-\eta'(q)}=\frac{k}{1-\frac{1}{2}}=\boldsymbol{2k}$$

□

6. 假设 X 是初值为 1 的 Galton-Watson 分支过程。后代分布的概率母函数为

$$g(s)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}s+\frac{1}{6}s^2$$

以 M 表示该过程存活过但没有后代的粒子数量，求 $E(M)$。

解：

先求灭绝概率，$g(s)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}s+\frac{1}{6}s^2=s$ 解得 $s_1=1$，$s_2=3$，所以灭绝概率 $q=1$，所以 $m=g'(1)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\times 2=\frac{2}{3}$，则该过程存活过的粒子平均数为

$$E\left(\sum_{k=0}^{\infty}X_k\right)=\frac{1}{1-g'(1)}=\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=3$$

从后代分布的概率母函数可知每个粒子没有后代的概率为 $\frac{1}{2}$，所以

$$\boldsymbol{E(M)}=\frac{1}{2}E\left(\sum_{k=0}^{\infty}X_k\right)\boldsymbol{=\frac{3}{2}}$$

□

7. 设 X 为 G-W 分支过程，τ_0 是灭绝时间。证明 $E_k\left(s^{\tau_0}\right)\geqslant\left[E_1\left(s^{\tau_0}\right)\right]^k$。

证明：

设 $\tau_0^{(i)}$ 表示初始第 i 个个体所在分支的灭绝时间，则

$$E_k(s^{\tau_0})=E(s^{\tau_0}|X_0=k)=E\left(s^{\max\left\{\tau_0^{(1)},\cdots\tau_0^{(k)}\right\}}\right)$$

因为 $0\leqslant s\leqslant 1$ 且 $\max\{\tau_0^{(1)},\cdots\tau_0^{(k)}\}\leqslant\sum_{i=1}^{k}\tau_0^{(i)}$，所以

$$\text{上式}\geqslant E\left(s^{\sum_{i=1}^{k}\tau_0^{(i)}}\right)=E\left(\prod_{i=1}^{k}s^{\tau_0^{(i)}}\right)\xlongequal{\tau_0^{(i)}\text{独立}}\prod_{i=1}^{k}E\left(s^{\tau_0^{(i)}}\right)=\left[E_1\left(s^{\tau_0}\right)\right]^k$$

所以 $E_k\left(s^{\tau_0}\right)\geqslant\left[E_1\left(s^{\tau_0}\right)\right]^k$。 □

第六章　布朗运动

布朗运动及其分布

练习题 6.1

（若无特别说明，以下总设 $B=\{B(t)\,;\,t\geqslant 0\}$ 为标准布朗运动。）

2. 对任意 $0<s<t$，求 $B(s)+B(t)$ 的概率密度函数。

解：

首先，$B(s)$ 与 $B(t)$ 不独立，所以需要进行变换，$B(s)+B(t)=2B(s)+B(t)-B(s)$，而 $B(s)$ 与 $B(t)-B(s)$ 是独立的，且 $B(s)\sim N(0,s)$, $B(t)-B(s)\sim N(0,t-s)$，所以

$$B(s)+B(t)=2B(s)+(B(t)-B(s))\sim N(0,4s+t-s)=N(0,3s+t)$$

所以 $B(s)+B(t)$ 的概率密度函数为

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(3s+t)}}e^{-\frac{x^2}{3s+t}}$$

□

3. 在例 6.1.9 假设下，（例 6.1.9：记 $\mu=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$, $\mathrm{D}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&4&2\\1&2&9\end{pmatrix}$，$(X_1,X_2,X_3)\sim N(\mu,\mathrm{D})$）

(1) 求 $X_2=2$ 时 (X_1,X_3) 的条件联合分布；

交换 X_2 与 X_3 的位置，$(X_1,X_3,X_2)\sim N\left(\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1&1\\1&9&2\\1&2&4\end{bmatrix}\right)$，则 $\tilde{\mu}=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}, v=2$, $A=\begin{bmatrix}1&1\\1&9\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, C=4$,

$$\begin{aligned}(X_1,X_3)\sim &N(\tilde{\mu}+BC^{-1}(2-v),A-BC^{-1}B^{\mathrm{T}})\\ &=N\left(\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\1&9\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&2\end{bmatrix}\right)=N\left(\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0.75&0.5\\0.5&8.0\end{bmatrix}\right)\end{aligned}$$

(2) 求 $X_2=2, X_3=3$ 时 X_1 的条件分布。

$$\tilde{\mu}=1, \bar{y}=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}, v=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}, A=1, B=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}9 & 2\\2 & 4\end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}X_1 &\sim N\left(\tilde{\mu}+BC^{-1}(\bar{y}-v), A-BC^{-1}B^{\mathrm{T}}\right)\\ &= N\left(1, 1-\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9 & 2\\2 & 4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)=N\left(1, \frac{23}{32}\right)\end{aligned}$$

4. 已知 $B(1)=x$，对任意 $0\leqslant s_1<s_2\leqslant s_3<s_4\leqslant 1$，证明

(1) $E((B(s_4)-B(s_3))(B(s_2)-B(s_1)))=(s_4-s_3)(s_2-s_1)(x^2-1)$,

证明：

$$\begin{aligned}&E((B(s_4)-B(s_3))(B(s_2)-B(s_1)))\\ &=\operatorname{Cov}(B(s_4)-B(s_3), B(s_2)-B(s_1))+E(B(s_4)-B(s_3))\cdot E(B(s_2)-B(s_1))\\ &=\operatorname{Cov}(B(s_4), B(s_2))-\operatorname{Cov}(B(s_4), B(s_1))-\operatorname{Cov}(B(s_3), B(s_2))+\operatorname{Cov}(B(s_3), B(s_1))\\ &+(E(B(s_4))-E(B(s_3)))(E(B(s_2))-E(B(s_1)))\end{aligned}$$

根据推论 6.1.10，当 $i<j$ 时，$\operatorname{Cov}(B(s_i), B(s_j))=s_i-s_is_j$，$E(B(s_i))=s_ix$，所以

$$\begin{aligned}\text{上式}&=s_2-s_2s_4-s_1+s_1s_4-s_2+s_2s_3+s_1-s_1s_3+(s_4x-s_3x)(s_2x-s_1x)\\ &=-s_1s_3+s_1s_4+s_2s_3-s_2s_4+x^2(s_1-s_2)(s_3-s_4)\\ &=(s_4-s_3)(s_1-s_2)(x^2-1)\end{aligned}$$

□

(2) $E\left[(B(s_4)-B(s_1))^2\right]=(s_4-s_1)+(s_4-s_1)^2(x^2-1)$。

证明：

仍然根据推论 6.1.10，

$$\begin{aligned}&E\left[(B(s_4)-B(s_1))^2\right]=\operatorname{Var}[B(s_4)-B(s_1)]+[E(B(s_4)-B(s_1))]^2\\ &=\operatorname{Var}[B(s_4)]+\operatorname{Var}[B(s_1)]-2\operatorname{Cov}(B(s_4), B(s_1))+[E(B(s_4))-E(B(s_1))]^2\\ &=s_4-s_4^2+s_1-s_1^2-2(s_1+s_1s_4)+(s_4x-s_1x)^2\\ &=s_4-s_1+2s_1s_4-s_1^2-s_4^2+x^2(s_4-s_1)\\ &=(s_4-s_1)+(s_4-s_1)(x^2-1)\end{aligned}$$

□

5. 设 B 是方差参数 $\sigma^2 = 3$ 的布朗运动，已知 $B(1) = 1, B(4) = 4$，求 $E(B(2)B(3))$ 和 $E(B(3)B(5))$。

解：

由于 $(B(1), B(2), B(3), B(4), B(5)) \sim N(\overrightarrow{0}, (i \wedge j)_{i,j=1,2,3,4})$，所以

$$(B(2), B(3), B(5), B(1), B(4)) \sim N\left(\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}, 3\begin{bmatrix}2&2&2&1&2\\2&3&3&1&3\\2&3&5&1&4\\1&1&1&1&1\\2&3&4&1&4\end{bmatrix}\right)$$

由于 $B(1) = 1, B(4) = 4$，所以

$$\begin{aligned}(B(2), B(3)) \sim & N(\tilde{\mu} + BC^{-1}(\bar{y} - v), A - BC^{-1}B^{\mathrm{T}}) \\ &= N\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1&2\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&4\end{bmatrix}^{-1}\left(\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right), 3\left(\begin{bmatrix}2&2\\2&3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1&2\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&2\\1&3\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\right)\right) \\ &= N\left(\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}\right)\end{aligned}$$

所以

$$\boldsymbol{E(B(2)B(3))} = \mathrm{Cov}(B(2), B(3)) + E(B(2))E(B(3)) = 1 + 2 \times 3 \boldsymbol{= 7}$$

同理，

$$\begin{aligned}(B(3), B(5)) \sim & N(\tilde{\mu} + BC^{-1}(\bar{y} - v), A - BC^{-1}B^{\mathrm{T}}) \\ &= N\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1&3\\1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&4\end{bmatrix}^{-1}\left(\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right), 3\left(\begin{bmatrix}3&3\\3&5\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1&3\\1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&1\\3&4\end{bmatrix}\right)\right) \\ &= N\left(\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}\right)\end{aligned}$$

所以

$$\boldsymbol{E(B(3)B(5))} = \mathrm{Cov}(B(3), B(5)) + E(B(3))E(B(5)) = 0 + 3 \times 4 \boldsymbol{= 12}$$

□

7. 令 $Y(t) = B^2(t) - t$，$R(t) = e^{cB(t) - c^2t/2}$，其中 $c > 0$ 为常数。证明对任意 $0 \leqslant t < s$，$E(Y(s)|B(t)) = Y(t)$ 以及 $E(R(s)|B(t)) = R(t)$。

证明：

根据推论 6.1.10，由于 $t < s$，所以 $E(B(s)|B(t)) = B(t), \mathrm{Var}(B(s)|B(t)) = s - t$，所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E(Y(s)|B(t))} &= E(B^2(s) - s|B(t)) = E(B^2(s)|B(t)) - E(s|B(t)) \\ &= \mathrm{Var}(B(s)|B(t)) + (E(B(s)|B(t)))^2 - s \\ &= s - t + (B(t))^2 - s = B^2(t) - t \boldsymbol{= T(t)}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E(R(s)|B(t))} &= E\left(e^{cB(s)-\frac{c^2s}{2}}\middle|B(t)\right) = E\left(e^{cB(s)}\middle|B(t)\right)E\left(e^{-\frac{c^2s}{2}}\middle|B(t)\right)\\
&=E\left(e^{cB(t)}\mid B(t)\right)E\left(e^{c(B(s)-B(t))}\middle|B(t)\right)E\left(e^{-\frac{c^2s}{2}}\mid B(t)\right)\\
&=e^{cB(t)}e^{\frac{c^2(s-t)}{2}}e^{-\frac{c^2s}{2}} = e^{cB(t)-\frac{c^2t}{2}} \boldsymbol{= R(t)}
\end{aligned}
$$

□

反射原理与极值分布

练习题 6.2

1. 求 $B(t)=x$ 条件下 $B^*(t)$ 的分布函数与概率密度函数。

解：

$(B^*(t),B(t))$ 的联合密度函数为 $h(z,x)=\dfrac{2(2z-x)}{\sqrt{2\pi t^3}}e^{-\frac{(2z-x)^2}{2t}}(z\geqslant x,x\leqslant z)$，$B(t)$ 的边际密度函数为 $p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}(x\in\mathbb{R})$，所以在 $B(t)=t$ 的条件下，$B^*(t)$ 的条件密度函数为

$$p_{B^*(t)|B(t)}(z|x)=\frac{h(z,x)}{p(x)}=\frac{2(2z-x)}{t}e^{-\frac{2(z^2-xz)}{t}}(z\geqslant x\vee 0)$$

所以 $B^*(t)$ 的条件分布函数为

$$F_{B^*(t)|B(t)}(z|x)=\begin{cases}-e^{-\frac{2(u^2-xu)}{t}}\Big|_{u=x\vee 0}^{z}=1-e^{-\frac{2(z^2-xz)}{t}}, & \text{当}z\geqslant x\vee 0\text{时}\\ 0, & \text{当}z<x\vee 0\text{时}\end{cases}$$

□

2. 求 $B^*(t)-B(t)$ 的概率密度函数。

解：

因为 $B^*(t)-B(t)=\max\limits_{0\leqslant u\leqslant t}[B(t-u)-B(t)]$，且 $\{B(t-u)-B(t)\,;\,u\in[0,t]\}$ 为标准布朗运动，所以

$$B^*(t)-B(t)\xlongequal{d}\max_{0\leqslant u\leqslant t}B(u)=B^*(t)\xlongequal{d}[B(t)]$$

从而 $B^*(t)-B(t)$ 的概率密度函数为 $\sqrt{\dfrac{2}{\pi t}}e^{-\frac{u^2}{2t}}(u\geqslant 0)$。 □

3. 求 $P(B(1)\leqslant x|B(u)\geqslant 0,0\leqslant u\leqslant 1)$。

解：

根据对称性，

$$
\begin{aligned}
P(B(1)\leqslant x|B(u)\geqslant 0,0\leqslant u\leqslant 1) &= P(B(1)\geqslant x|B(u)\leqslant 0,0\leqslant u\leqslant 1)\\
&= P(B(1)\geqslant -x|B^*(1)=0)
\end{aligned}
$$

$(B^*(1), B(1))$ 的联合密度函数为

$$h(z,x)=\frac{2(2z-x)}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(2z-x)^2}{2}} \quad (z \geqslant x \vee 0)$$

$B^*(1)$ 的边际密度函数为 $p(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}(z \geqslant 0)$，所以

$$\text{原式}=\begin{cases}-\int_{-x}^{0} ue^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u = 1-e^{-\frac{x^2}{2}}, & \text{当}x \geqslant 0\text{时} \\ 0, & \text{当}x<0\text{时}\end{cases}$$

□

4. 证明对任意 $z \geqslant 0$，τ_z 与 τ_{-z} 同分布。

证明：

对任意 $t \geqslant 0$，有

$$P(\tau_{-z}>t)=P(B(u)>-z, 0\leqslant u\leqslant t) \xlongequal{\text{对称性}} P(B(u)<z, 0\leqslant u \leqslant t)=P(\tau_z>t)$$

即 τ_z 与 τ_{-z} 同分布。 □

6. 证明当 $0<z\to\infty$ 时，$\tau_z \xrightarrow{a.s.} \infty$。

证明：

因为对任意 $t>0$ 和 $z>0$ 有

$$0\leqslant P(\tau_z\leqslant t)=\int_0^t \frac{z}{\sqrt{2\pi s^3}}e^{-\frac{z^2}{2s}}\mathrm{d}s \xlongequal{\text{令}s=\frac{z^2}{u^2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{\frac{z}{\sqrt{t}}}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{s}}\mathrm{d}u \xrightarrow{z\to+\infty} 0$$

所以 $\lim\limits_{z\to+\infty} P(\tau_z\leqslant t)=0(\forall t>0)$，又因为 τ_z 关于 z 单调增，所以事件 $\{\tau_z\leqslant t\}$ 关于 z 单调减，从而对任意 $t>0$ 有

$$0=\lim_{n\to\infty}P(\tau_n\leqslant t)=P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\{\tau_n\leqslant t\}\right)=P\left(\lim_{n\to\infty}\tau_n\leqslant t\right)=P\left(\lim_{z\to+\infty}\tau_z\leqslant t\right)$$

进而由

$$0\leqslant P\left(\lim_{n\to+\infty}\tau_z<+\infty\right)=P\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}\left\{\lim_{z\to+\infty}\tau_z\leqslant m\right\}\right)\leqslant\sum_{m=1}^{\infty}P\left(\lim_{z\to+\infty}\tau_z\leqslant m\right)=0$$

知 $P\left(\lim\limits_{z\to+\infty}\tau_z=+\infty\right)=1$，于是当 $z\to+\infty$ 时有 $\tau_z\xrightarrow{a.s.}+\infty$。 □