第五章　关系

5.1　关系的概念

1. 集合 $X = \{a, b, c\}$ 上的一个关系 R 的关系矩阵如下，请写出这个关系。(注：矩阵的第 1、2、3 行以及第 1、2、3 列，分别对应 X 中的元素 a、b、c)。

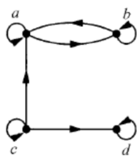
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

解：

$$R = \{(a, a), (a, c), (b, b), (c, a), (c, c)\}$$

□

2. 一集合上的一个关系的关系图如下图所示，请写出这个关系。



解：

$$R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b),$$
$$(c, a), (c, c), (c, d), (d, d)\}$$

□

3. 设 X 和 Y 都是有限集，$|X| = m$，$|Y| = n$。问 X 到 Y 的不同的关系有多少个？

解：

X到Y的不同的关系有$2^{m\times n}$个。

□

5.2　关系的运算

1. 设 R 是 X 到 Y 的二元关系，S 是 Y 到 Z 的二元关系，证明 $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$。

证明：

$$\begin{aligned}
\forall (z, x), \quad & (z, x) \in (R \circ S)^{-1} \\
& \iff (x, z) \in R \circ S \\
& \iff \exists y \in Y, \ \text{ s.t. } (x, y) \in R \land (y, z) \in S \\
& \iff \exists y \in Y, \ \text{ s.t. } (y, x) \in R^{-1} \land (z, y) \in S^{-1} \\
& \iff (z, x) \in S^{-1} \circ R^{-1}
\end{aligned}$$

$$\therefore (R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$$

□

2. 设 R、S、T 都是 X 上的关系。证明：$R \circ (S \cap T) \subseteq (R \circ S) \cap (R \circ T)$, $(R \cap S) \circ T \subseteq (R \circ T) \cap (S \circ T)$。

证明：

$\forall (x, w) \in R \circ (S \cap T)$

即$\exists y \in X, \ \text{ s.t. } (x, y) \in R \land (y, w) \in S \cap T$

$\therefore (x, y) \in R, (y, w) \in S, (y, w) \in T$

$\therefore (x, w) \in R \circ S, (x, w) \in R \circ T$

$\therefore (x, w) \in (R \circ S) \cap (R \circ T)$

$\therefore R \circ (S \cap T) \subseteq (R \circ T) \cap (S \circ T)$

$\forall (x, w) \in (R \cap S) \circ T$

即$\exists z \in X, \ \text{ s.t. } (x, z) \in R \cap S \land (z, w) \in T$

$\therefore (x, z) \in R, (x, z) \in S, (z, w) \in T$

$\therefore (x, w) \in R \circ T, (x, w) \in S \circ T$

$\therefore (x, w) \in (R \circ T) \cap (S \circ T)$

$\therefore (R \cap S) \circ T \subseteq (R \circ T) \cap (S \circ T)$

□

5.3 关系的特殊性质及其闭包

1. 下列关系是否是自反、反自反、对称、反对称和传递的?

   (1) 集合 $X=\{1,2,...,9,10\}$，X 上的关系 $R=\{(x,y)|x+y=10\}$

   (2) 任意集合 X 上的恒等关系 I_X。

   (3) 任意集合 X 上的空关系 $\varnothing$。

关系	自反	反自反	对称	反对称	传递
(1) R	否	否	是	否	否
(2) I_X	是	否	是	是	是
(3) $\varnothing$	否	是	是	是	是

2. 设 X 是所有人组成的集合，定义 X 上的关系 R_1 和 R_2：aR_1b 当且仅当 a 比 b 高，aR_2b 当且仅当 a 和 b 有共同的祖父母。问关系 R_1 和 $R2$ 是否是自反、反自反、对称、反对称、传递的?

关系	自反	反自反	对称	反对称	传递
R_1	否	是	否	是	是
R_2	是	否	是	否	是

3. * 下面的论证试图证明：如果集合 S 上的关系 R 是对称和传递的，那么 R 必定也是自反的。请指出其中的错误。
   “由对称性，从 xRy 可推出 yRx，再由传递性，可从 xRy 和 yRx 推出 xRx。于是，对任意 x∈S，xRx 成立，所以 R 是自反的”

   解：

   $$\text{对于}\forall x\in S,\text{并不一定}\exists y\in S,\ \text{s.t. } xRy$$
   $$\text{当}\neg\exists y(y\in S\wedge xRy)\text{时上述论证无效。}$$

   □

4. 证明：若 R 是 X 上自反和传递的关系，则 $R^2{=}R$。

   证明：

   $\forall(x,z)\in R^2$

   $\Rightarrow \exists y\in X,\ \text{s.t. } (x,y)\in R\wedge(y,z)\in R$

   $\because R$是传递的

   $\therefore (x,z)\in R$

   $\therefore R^2\subseteq R$

   $\forall(x,z)\in R$

   $\because R$是自反的

   $\therefore (z,z)\in R$

   $\therefore (x,z)\in R^2$

   $\therefore R\subseteq R^2$

   综上所述，$R^2=R$

   □

5. 设 X 是有限集，$|X|=n$。问 X 上有多少个不同的:

   (1) * 对称关系?

   $$\text{即}n\text{维对称矩阵的个数，}$$
   $$2^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

   (2) * 反对称关系?

   n维矩阵的每组对称位置只有00、01、10

   三种情况，对角线每个位置可以为0或1，

   $$3^{\frac{n(n-1)}{2}}\times 2^n$$

   (3) 既非自反又非反自反的关系?

   即对角线既不是全1，也不是全0的n维矩阵个数，

   $$(2^n-2)\times 2^{n^2-n}$$

6. 设 R_1 和 R_2 是 X 上的关系。证明 $t(R_1\cup R_2)\supseteq t(R_1)\cup t(R_2)$。

   证明：

   $$\because t(R)=\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i$$

   $$\therefore \text{原式可转化为}\bigcup_{i=1}^{\infty}(R_1\cup R_2)^i\supseteq\bigcup_{j=1}^{\infty}R_1^j\cup\bigcup_{k=1}^{\infty}R_2^k$$

   之后实在不会做了。

   □