《随机过程》第三周作业

练习题 2.1

1. 试解释对离散参数随机过程而言，“不可区分”与“修正”等价。

由于“不可区分”能推出“修正”，所以这里只需要说明对离散参数随机过程能从“修正”推出“不可区分”。

设 $X = \{X_t; t \in T\}, Y = \{Y_t; t \in T\}$ 都是概率空间 $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ 上的随机过程。

“修正”的原始定义为对 $\forall t \in T, P(X_t = Y_t) = 1$，将概率进行定义展开可得：$\forall t \in T, \exists A_t \in \mathfrak{F}$ 使得 $P(A) = 1$ 而且 $\forall \omega \in A, X_t(\omega) = Y_t(\omega)$。

“不可区分”的定义为 $\exists A \in \mathfrak{F}$，使得 $P(A) = 1$ 而且 $\forall t \in T, \forall \omega \in A, X_t(\omega) = Y_t(\omega)$。

比较这两个定义可知在“修正”的定义中 A_t 的取法与 t 有关，而在“不可区分”的定义中 A 的取法与 t 无关。

所以若 T 为离散参数集，且 X 与 Y 互为修正，则对每一个 $t \in T$ 都能找到一个 $A_t \in \mathfrak{F}$ 满足 $P(A_t) = 1, \forall \omega \in A_t, X_t(\omega) = Y_t(\omega)$。则 $P(\overline{A_t}) = 0$，取 $A = \bigcap\limits_{t \in T}(A_t)$，则

$$P(A) = P\left(\bigcap_{t \in T} A_t\right) = P\left(\overline{\bigcup_{t \in T} \overline{A_t}}\right) = 1 - P\left(\bigcup_{t \in T} \overline{A_t}\right)$$

由于 T 是离散集合，可列个零测集的并仍然是零测集，所以 $P\left(\bigcup\limits_{t \in T} \overline{A_t}\right) = 0$，所以 $P(A) = 1$。而且 $\forall \omega \in A, X_t(\omega) = Y_t(\omega)$，即 X 与 Y 不可区分。

5. 已知 $\{X(t)\ ;\ t \in [0, +\infty)\}$ 为平稳独立增量过程。对任意 $s > 0$，令 $Y(t) = X(s+t) - X(s)$，证明 $\{Y(t)\ ;\ t \in [0, +\infty)\}$ 也是平稳独立增量过程。

证明：

对于 $\forall n \in \mathbb{Z}^+, \forall t_1, t_2, \cdots, t_n \in [0, +\infty), \forall i \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$,

$$Y(t_{i+1}) - Y(t_i) = [X(s+t_{i+1}) - X(s)] - [X(s+t_i) - X(s)] = X(s+t_{i+1}) - X(s+t_i)$$

因为 $s > 0$，所以 $s + t_{i+1}, s + t_i \in [0, +\infty)$，由 $\{X(t)\ ;\ t \in [0, +\infty)\}$ 是独立增量过程可知，$\{X(s+t_{i+1}) - X(s+t_i)\ ;\ i \in 1, 2, \cdots, n-1\}$ 相互独立，即 $\{Y(t_{i+1}) - Y(t_i)\ ;\ i \in 1, 2, \cdots, n-1\}$ 相互独立，所以 $\{Y(t)\ ;\ t \in [0, +\infty)\}$ 是独立增量过程。下证“平稳”：

对于 $\forall t, t+h, w, w+h \in [0, +\infty)$,

$$Y(t+h) - Y(t) = [X(s+t+h) - X(s)] - [X(s+t) - X(s)] = X(s+t+h) - X(s+t)$$

同理，$Y(w+h) - Y(w) = X(s+w+h) - X(s+w)$。由于 $s+t, s+t+h,\ s+w, s+w+h \in [0, +\infty)$，且 $\{X(t)\ ;\ t \in [0, +\infty)\}$ 是平稳独立增量过程，所以 $X(s+t+h) - x(s+t)$ 与 $X(s+w+h) - X(s+w)$ 的分布相同，即 $Y(t+h) - Y(t)$ 与 $Y(w+h) - Y(w)$ 的分布相同，所以 $\{Y(t)\ ;\ t \in [0, +\infty)\}$ 是平稳独立增量过程。 $\square$

6. 证明伯努利过程不是独立增量过程。

证明 :

设随机过程 $X = \{X_n\,;\, n \in \mathbb{Z}_+\}$ 是伯努利过程，则 $\{X_n\,;\, n \in \mathbb{Z}_+\}$ 是独立同分布的随机变量序列，而且

$$P(X_n = 1) = p, \qquad P(X_n = 0) = q = 1 - p, \quad 0 < p < 1$$

则 $X_1 - X_0$ 的分布列为:

$X_1 - X_0$	-1	0	1
P	pq	$p^2 + q^2$	qp

所以 $P(X_0 = 1) = p$, $P(X_1 - X_0 = 1) = qp$, 而 $P(X_0 = 1, X_1 - X_0 = 1) = 0$。显然 $P(X_0 = 1)P(X_1 - X_0 = 1) \neq P(X_0 = 1, X_1 - X_0 = 1)$，因此 X_0 与 $X_1 - X_0$ 不独立，从而伯努利过程不是独立增量过程。 $\square$