第一章　单元作业 3

1. 试用随机变量 X 的分布函数 $F_X(x)$ 表示随机变量 $-\min(X,0)$ 的分布函数。

   解：

$$
\begin{aligned}
F_{-\min(X,0)}(x) &= P(-\min(X,0) \leqslant x) \\
&= P(\min(X,0) \geqslant -x) \\
&= P(X \geqslant -x, 0 \geqslant -x) \\
&= P(X \geqslant -x, x \geqslant 0) \\
&= \begin{cases} P(X \geqslant -x), & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 - P(X < -x), & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 - F_X(-x-0), & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

□

2. 设随机变量 X 等可能地取值 0 和 1, 求 X 的分布函数。

   解：

$$
F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & 0 \leqslant x < 1 \\ 1, & x \geqslant 1 \end{cases}
$$

□

3. 设离散型随机变量 X 的分布列为 $P(X=k) = \dfrac{c}{2^k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$ 求常数 c 的值。

   解：

$$
\begin{aligned}
&\because \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c}{2^k} = 1 \\
&\therefore c \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = c \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2c = 1 \\
&\therefore c = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

□

4. 设随机变量 X 的概率密度函数为 $p(x)=\begin{cases} ce^{-\sqrt{x}}, & x>0 \\ 0, & x\leqslant 0 \end{cases}$，求常数 c。

解：

$$\begin{aligned} &\because \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\mathrm{d}x = 1 \\ &\therefore \int_{0}^{+\infty} ce^{-\sqrt{x}}\mathrm{d}x = c\int_{0}^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2c = 1 \\ &\therefore c = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

□

5. 设 $X\sim N(10,4)$，求概率 $P(6<X\leqslant 9)$ 和 $P(7\leqslant X<12)$。

解：

$$\begin{aligned} &\mu=10,\sigma^2=4,\sigma=2 \\ &\therefore \frac{x-10}{2}\sim N(0,1) \\ P(6<X\leqslant 9) &= P(\frac{6-10}{2}<\frac{X-10}{2}\leqslant\frac{9-10}{2}) \\ &= \Phi(\frac{9-10}{2})-\Phi(\frac{6-10}{2}) \\ &= \Phi(-0.5)-\Phi(-2) \\ &= \Phi(2)-\Phi(0.5) \\ &\approx 0.9772-0.6915 \\ &= 0.2857 \\ P(7\leqslant X<12) &= P(\frac{7-10}{2}\leqslant\frac{X-10}{2}<\frac{12-10}{2}) \\ &= \Phi(\frac{12-10}{2}-0)-\Phi(\frac{7-10}{2}-0) \\ &= \Phi(1)-\Phi(-1.5) \\ &= \Phi(1)-(1-\Phi(1.5)) \\ &\approx 0.8413-(1-0.9332) \\ &= 0.7745 \end{aligned}$$

□

6. 设 $X\sim \mathrm{Exp}(\lambda)$，求 λ 使得 $P(X>1)=2P(X>2)$。

解：

$$\begin{aligned} &\text{由}P(X>1)=2P(X>2)\text{可知:} \\ &\int_{1}^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x = 2\int_{2}^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x \\ &-e^{-\lambda x}\big|_{1}^{+\infty} = -2\,e^{-\lambda x}\big|_{2}^{+\infty} \\ &e^{-\lambda} = 2e^{-2\lambda} \\ &2(e^{-\lambda})^2-e^{-\lambda}=0 \\ &e^{-\lambda}(2e^{-\lambda}-1)=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\because e^{-\lambda}\neq 0 \\ &\therefore 2e^{-\lambda}-1=0 \\ &\therefore e^{-\lambda}=\frac{1}{2} \\ &\therefore \lambda=-\ln(\frac{1}{2})=\ln 2 \end{aligned}$$

□

7. 设随机变量 X 服从几何分布 $\mathrm{Ge}(p)$，求 X 的数学期望 EX。

解：

$$\begin{aligned}&\because 0<p<1\\&\therefore EX=\sum_{k=1}^{\infty}kp(1-p)^{k-1}=\frac{1}{p}\end{aligned}$$

□

8. 设随机变量 X 服从几何分布 $\mathrm{Ge}(p)$，求 X 的方差 $\operatorname{Var}X$。

解：

$$\begin{aligned}&\because 0<p<1\\ \therefore \operatorname{Var}X&=EX^2-(EX)^2\\&=\sum_{k=1}^{\infty}k^2p(1-p)^{k-1}-\left(\frac{1}{p}\right)^2\\&=\frac{2-p}{p^2}-\frac{1}{p^2}\\&=\frac{1-p}{p^2}\end{aligned}$$

□

9. 设随机变量 X 服从 Gamma 分布 $\mathrm{Ga}(\alpha,\lambda)$，求数学期望 EX^n。

解：

$$\begin{aligned}EX^n&=\int_{-\infty}^{+\infty}x^np(x)\mathrm{d}x\\&=\int_0^{+\infty}x^n\cdot\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\lambda^n\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty}(\lambda x)^{n+\alpha-1}e^{-\lambda x}\mathrm{d}(\lambda x)\\&=\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\lambda^n\Gamma(\alpha)}\\&=\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{\lambda^n}\end{aligned}$$

□

10. 设随机变量 X 服从均匀分布 $U(0,1)$，计算随机变量 X^3 的方差。

解：

$$\text{由题意可知，}X\text{的概率密度函数为}p(x)=\begin{cases}0, & x<0\text{或}x>1\\1, & 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Var} X^3 &= E(X^3)^2 - (EX^3)^2 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x^6 p(x) \mathrm{d}x - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 p(x) \mathrm{d}x \right)^2 \\
&= \int_0^1 x^6 \mathrm{d}x - \left(\int_0^1 x^3 \mathrm{d}x \right)^2 \\
&= \frac{9}{112} \\
&\approx 0.0803571428571429
\end{aligned}
$$

□