《概率论》作业

岳锦鹏

2023 年 9 月 30 日——2024 年 1 月 4 日

目录

第一章　单元作业 1 **5**

第二章　单元作业 2 **9**

第三章　单元作业 3 **15**

第四章　单元作业 4 **19**

第五章　单元作业 5 **23**

第六章　单元作业 6 **29**

第一章　单元作业 1

1. 证明 $P(AB) \geq P(A)+P(B)-1$。

证明：

$$\begin{aligned}
&\text{设}\Omega\text{表示全集，则}A \in \Omega, B \in \Omega \\
&\therefore A \cup B \in \Omega \\
&\therefore P(A \cup B) \leq P(\Omega) \\
&\therefore P(A)+P(B)-P(AB) \leq 1 \\
&\therefore P(AB) \geq P(A)+P(B)-1
\end{aligned}$$

□

2. 一副标准扑克牌 52 张一张一张轮流分发给给 4 名游戏者，求每人恰好得到 1 张 A 的概率。

解：

$$\begin{aligned}
&\text{设}A\text{表示事件“每人恰好得到一张}A\text{”，由盒子模型可知:} \\
&P(A)=\frac{\mathrm{P}_4^4}{4^4}=\frac{4!}{256}=\frac{3}{32}
\end{aligned}$$

□

3. 设 $P(A)=0.7, P(A-B)=0.3$，求概率 $P(\overline{AB})$。

解：

$$\begin{aligned}
P(\overline{AB}) &= 1-P(AB)=1-P(A-(A-B)) \\
&= 1-(P(A)-P(A-B))=1-(0.7-0.3)=0.6
\end{aligned}$$

□

4. 设 $P(A)=a, P(B)=b, P(A \cup B)=c$，求概率 $P(\overline{\overline{A} \cup \overline{B}})$。

解：

$$P(\overline{\overline{A} \cup \overline{B}})=P(A \cap B)=P(A)+P(B)-P(A \cup B)=a+b-c$$

□

5. 设 $A, B \in \mathcal{F}$，证明 $P(A)=P(AB)+P(A\overline{B}),\quad P(A \triangle B)=P(A)+P(B)-2P(AB)$。

证明：

$$
\begin{aligned}
&\text{设}\Omega\text{表示全集}\\
P(A) &= P(A\cap\Omega) = P(A\cap(B\cup\overline{B}))\\
&= P(A(B+\overline{B})) = P(AB+A\overline{B}) = P(AB)+P(A\overline{B})\\
P(A\triangle B) &= P((A\backslash B)\cup(B\backslash A)) = P((A-(AB))+(B-(AB)))\\
&= P(A)-P(AB)+P(B)-P(AB) = P(A)+P(B)-2P(AB)
\end{aligned}
$$

□

6. 设 $\Omega=(-\infty,\infty), A=\{x\in\Omega:1\le x\le 5\}, B=\{x\in\Omega:3<x<7\}, C=\{x\in\Omega:x<0\}$，求下列事件 $\overline{A}, A\cup B, B\overline{C}, \overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}, (A\cup B)C$。

解：

$$
\begin{aligned}
&\overline{A}=\{x\in\Omega:x<1\text{或}x>5\}\\
&A\cup B=\{x\in\Omega:1\le x<7\}\\
&B\overline{C}=\{x\in\Omega:3<x<7\}\\
&\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}=\{x\in\Omega:0\le x<1\text{或}x\ge 7\}\\
&(A\cup B)C=\varnothing
\end{aligned}
$$

□

7. 设 I 是任意指标集，$\{A_i,i\in I\}$ 是一事件类，证明 $\overline{\bigcup_{i\in I}A_i}=\bigcap_{i\in I}\overline{A_i},\quad \overline{\bigcap_{i\in I}A_i}=\bigcup_{i\in I}\overline{A_i}$。

证明：

$$
\begin{aligned}
&\forall x\in\overline{\bigcup_{i\in I}A_i},\ \text{即}x\notin\bigcup_{i\in I}A_i,\text{即}\\
&\forall i\in I, x\notin A_i,\\
&\therefore\forall i\in I, x\in\overline{A_i}\\
&\therefore x\in\bigcap_{i\in I}\overline{A_i}
\end{aligned}
$$

$$
\therefore\overline{\bigcup_{i\in I}A_i}\subseteq\bigcap_{i\in I}\overline{A_i} \tag{1}
$$

$$
\begin{aligned}
&\forall x\in\bigcap_{i\in I}\overline{A_i},\text{即}\\
&\forall i\in I, x\in\overline{A_i}\\
&\therefore\forall i\in I, x\notin A_i\\
&\therefore x\notin\bigcup_{i\in I}A_i\\
&\therefore x\in\overline{\bigcup_{i\in I}A_i}
\end{aligned}
$$

$$
\therefore\bigcap_{i\in I}\overline{A_i}\subseteq\overline{\bigcup_{i\in I}A_i} \tag{2}
$$

由(1)(2)可知，$\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}$

由对偶公式可知,$\overline{\overline{\bigcup_{i\in I} A_i}} = \overline{\bigcap_{i\in I} \overline{A_i}}$

$\therefore \overline{\bigcap_{i\in I} \overline{A_i}} = \bigcup_{i\in I} A_i$

$\because \{\overline{A_i} | i \in I\}$也是一事件类

$\therefore$ 将$\overline{A_i}$替换为A_i后可得

$$\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$$

□

8. 从装有 10 双不同尺码或不同样式的皮鞋的箱子中, 任取 4 只, 求恰能成 1 双的概率。

解 :

设A表示事件“恰能成1双”，B表示事件“恰能成2双”，C表示事件“不能成双”，

则由不返回抽样模型可知：

$$\begin{aligned} P(A) = 1 - P(B) - P(C) &= 1 - \frac{\mathrm{C}_{10}^2}{\mathrm{C}_{20}^4} - \frac{\mathrm{C}_{20}^1\mathrm{C}_{18}^1\mathrm{C}_{16}^1\mathrm{C}_{14}^1}{\mathrm{P}_{20}^4} \\ &= 1 - \frac{\binom{10}{2}}{\binom{20}{4}} - \frac{\binom{20}{1}\binom{18}{1}\binom{16}{1}\binom{14}{1}}{\binom{20}{4} \times 4!} = \frac{96}{323} \approx 0.297213622291022 \end{aligned}$$

□

9. 现从有 15 名男生和 30 名女生的班级中随机挑选 10 名同学参加某项课外活动, 求在被挑选的同学中恰好有 3 名男生的概率。

解 :

设A表示事件“在被挑选的同学中恰好有3名男生”，则

$$P(A) = \frac{\mathrm{C}_{15}^3\mathrm{C}_{30}^7}{\mathrm{C}_{45}^{10}} = \frac{\binom{15}{3}\binom{30}{7}}{\binom{45}{10}} = \frac{3958500}{13633279} \approx 0.290355680390609$$

□

10. 设 $\mathcal{F}$ 是 Ω 上的事件域，$A, B \in \mathcal{F}$，证明 $A \cup B, AB \in \mathcal{F}$。

证明 :

设$A_1 = A, A_2 = B, \forall n > 2, A_n = \varnothing$

$\because \mathcal{F}$是Ω上的事件域,$\forall n \geqslant 1, A_n \in \mathcal{F}$

$\therefore \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A \cup B \in \mathcal{F}$

又 $\because A, B \in \mathcal{F}$

$\therefore \overline{A}, \overline{B} \in \mathcal{F}$

同理，$\overline{A} \cup \overline{B} \in \mathcal{F}$

$\therefore \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = AB \in \mathcal{F}$

□

第二章　单元作业 2

1. 三人独立地对同一目标进行射击, 各人击中目标的概率分别是 0.7, 0.8, 0.6, 求目标被击中的概率.

解：

$$\begin{aligned}
&\text{将三人击中目标的事件分别表示为} A\text{、}B\text{、}C,\\
&\text{则} P(A)=0.7, P(B)=0.8, P(C)=0.6,\\
&P(\text{目标被击中})=P(A\cup B\cup C)\\
&\because \text{三人独立射击}\\
&\therefore A\text{、}B\text{、}C\text{相互独立}\\
&\therefore \overline{A}\text{、}\overline{B}\text{、}\overline{C}\text{相互独立}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore P(A\cup B\cup C) &= P(\overline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}}) = 1-P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})\\
&= 1-P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})\\
&= 1-(1-P(A))(1-P(B))(1-P(C))\\
&= 1-(1-0.7)*(1-0.8)*(1-0.6)\\
&= 0.976
\end{aligned}$$

□

2. 制作某个产品有两个关键工序, 第一道和第二道工序的不合格品的概率分别为 3% 和 5%, 假定两道工序互不影响, 试问该产品为不合格品的概率 (答案保留至小数点后 4 位).

解：

$$\begin{aligned}
&\text{令} A\text{：第一道工序不合格，} B\text{：第二道工序不合格}\\
&\text{则} P(A)=0.03\text{，}P(B)=0.05\\
&\text{则} P(\text{该产品为不合格品})=P(A\cup B)\\
&\because \text{两道工序互不影响}\\
&\therefore A\text{与}B\text{相互独立}\\
&\therefore \overline{A}\text{与}\overline{B}\text{相互独立}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore P(A\cup B) &= P(\overline{\bar{A}\bar{B}}) = 1-P(\bar{A}\bar{B})\\ &= 1-P(\bar{A})P(\bar{B})\\ &= 1-(1-P(A))(1-P(B))\\ &= 1-(1-0.03)(1-0.05)\\ &= 0.0785\end{aligned}$$

□

3. **甲乙丙三个同学同时独立参加考试, 不及格的概率分别为: 0.2, 0.3, 0.4,**

(1) 求恰有 2 位同学不及格的概率;

(2) 若已知 3 位同学中有 2 位不及格, 求其中 1 位是同学乙的概率.

解 :

$$\begin{aligned}&\text{设}A\text{、}B\text{、}C\text{分别表示事件甲不合格、乙不合格、丙不合格}\\ &\text{则}P(A)=0.2, P(B)=0.3, P(C)=0.4\\ &P(\bar{A})=0.8, P(\bar{B})=0.7, P(\bar{C})=0.6\\ &\text{且}A\text{、}B\text{、}C\text{相互独立}\end{aligned}$$

(1)

$$\begin{aligned}P(\text{恰有2位同学不合格}) &= P(AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC)\\ &= P(A)P(B)P(\bar{C})+P(A)P(\bar{B})P(C)+P(\bar{A})P(B)P(C)\\ &= 0.2\times0.3\times0.6+0.2\times0.7\times0.4+0.8\times0.3\times0.4\\ &= 0.188\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}P(\text{其中1位是同学乙}) &= P(B \mid \text{恰有2位同学不合格})\\ &= \frac{P(B\cap\text{恰有2位同学不合格})}{P(\text{恰有2位同学不合格})}\\ &= \frac{P(AB\bar{C}+\bar{A}BC)}{P(AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC)}\\ &= \frac{P(A)P(B)P(\bar{C})+P(\bar{A})P(B)P(C)}{P(A)P(B)P(\bar{C})+P(A)P(\bar{B})P(C)+P(\bar{A})P(B)P(C)}\\ &= \frac{0.2\times0.3\times0.6+0.8\times0.3\times0.4}{0.2\times0.3\times0.6+0.2\times0.7\times0.4+0.8\times0.3\times0.4}\\ &= \frac{33}{47}\\ &\approx 0.702127659574468\end{aligned}$$

□

4. 甲袋中装有 2 个白球和 4 个黑球, 乙袋中装有 3 个白球和 2 个黑球, 现随机地从乙袋中取出一球放入甲袋, 然后从甲袋中随机取出一球, 试求从甲袋中取得的球是白球的概率.

解：

$$
\begin{aligned}
&\text{设}A\text{表示从乙袋中取出的是白球，}B\text{表示从甲袋中取出的是白球}\\
\text{则}P(B) &= P(A)P(B|A) + P(\overline{A})P(B|\overline{A})\\
&= \frac{3}{3+2} \times \frac{2+1}{2+4+1} + \frac{2}{3+2} \times \frac{2}{2+4+1}\\
&= \frac{13}{35}\\
&\approx 0.371428571428571
\end{aligned}
$$

□

5. 设 n 只罐子的每一只中装有 4 个白球和 6 个黑球, 另有一只罐子中装有 5 个白球和 5 个黑球. 从这 n+1 个罐子中随机地选择一只罐子, 从中任取两个球, 结果发现两个都是黑球. 已知在此条件下, 有 5 个白球和 3 个黑球留在选出的罐子中的条件概率是 1/7, 求 n 的值.

解：

$$
\begin{aligned}
&\text{设}A\text{表示事件：选中的是第}n+1\text{个罐子}\\
&\text{设}B\text{表示事件：取出的两个都是黑球}\\
&\text{则事件：有5个白球和3个黑球留在选出的罐子中，}\\
&\text{即选中的是第}n+1\text{个罐子，并且取出的两个都是黑球，可表示为}AB\\
&\therefore P(A|B) = \frac{1}{7}, P(A) = \frac{1}{n+1}\\
&P(B|A) = \frac{\mathrm{C}_5^2}{\mathrm{C}_{10}^2} = \frac{2}{9}\\
\therefore P(B) &= P(A)P(B|A) + P(\overline{A})P(B|\overline{A})\\
&= \frac{1}{n+1} \times \frac{\mathrm{C}_5^2}{\mathrm{C}_{10}^2} + \frac{n}{n+1} \times \frac{\mathrm{C}_6^2}{\mathrm{C}_{10}^2}\\
&= \frac{3n+2}{9(n+1)}\\
\therefore P(A|B) &= \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}\\
&= \frac{\frac{1}{n+1} \times \frac{2}{9}}{\frac{3n+2}{9(n+1)}}\\
&= \frac{2}{3n+2} = \frac{1}{7}\\
&\therefore n = 4
\end{aligned}
$$

□

6. 设有三张卡片, 第一张两面皆为红色, 第二张两面皆为黄色, 第三张一面是红色一面是黄色. 随机地选择一张卡片并随机地选择其中一面. 如果已知此面是红色, 求另一面也是红色的概率.

解：

设A、B、C分别表示选到了第一、二、三张卡片，设R表示选择的一面是红色。

则$P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{3}$

$P(R|A)=1, P(R|B)=0, P(R|C)=\dfrac{1}{2}$

$$
\begin{aligned}
\text{则}P(\text{另一面也是红色}) &= P(A|R) \\
&= \frac{P(A)P(R|A)}{P(A)P(R|A)+P(B)P(R|B)+P(C)P(R|C)} \\
&= \frac{\frac{1}{3}\times 1}{\frac{1}{3}\times 1+\frac{1}{3}\times 0+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}} \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

□

7. 从装有 r 个红球和 w 个白球的盒子中不返回的取出两只, 求事件“第一只为红球, 第二只为白球”的概率.

解：

$$
\begin{aligned}
&\text{设}A\text{表示取出的两只球一红一白} \\
&\text{则}P(\text{第一只为红球，第二只为白球}) = \frac{P(A)}{\mathrm{P}_2^2} \\
&= \frac{\frac{\mathrm{C}_r^1\mathrm{C}_w^1}{\mathrm{C}_{r+w}^2}}{\mathrm{P}_2^2} \\
&= \frac{\frac{\binom{r}{1}\binom{w}{1}}{\binom{r+w}{2}}}{2!} \\
&= \frac{rw}{(r+w)(r+w-1)}
\end{aligned}
$$

□

8. 已知 $P(A)=\frac{1}{4}, P(B|A)=\frac{1}{3}, P(A|B)=\frac{1}{2}$, 求概率 $P(A\cup B)$。

解：

$$
\begin{aligned}
&P(AB)=P(B|A)P(A)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12} \\
&P(B)=\frac{P(AB)}{P(A|B)}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{6} \\
&\therefore P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB) \\
&=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12} \\
&=\frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

□

9. 设 $P(A)=P(B)=\frac{1}{3}, P(A|B)=\frac{1}{6}$，求概率 $P(\overline{A}|\overline{B})$。

解：

$$P(AB) = P(B)P(A|B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$$

$$P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(AB))$$

$$= 1 - (\frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{18}) = \frac{7}{18}$$

$$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore P(\overline{A}|\overline{B}) = \frac{P(\overline{A}\,\overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{\frac{7}{18}}{\frac{2}{3}} = \frac{7}{12}$$

$\square$

第三章 单元作业 3

1. 试用随机变量 X 的分布函数 $F_X(x)$ 表示随机变量 $-\min(X,0)$ 的分布函数。

解：

$$\begin{aligned}
F_{-\min(X,0)}(x) &= P(-\min(X,0) \leqslant x) \\
&= P(\min(X,0) \geqslant -x) \\
&= P(X \geqslant -x, 0 \geqslant -x) \\
&= P(X \geqslant -x, x \geqslant 0) \\
&= \begin{cases} P(X \geqslant -x), & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 - P(X < -x), & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 - F_X(-x-0), & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

□

2. 设随机变量 X 等可能地取值 0 和 1, 求 X 的分布函数。

解：

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & 0 \leqslant x < 1 \\ 1, & x \geqslant 1 \end{cases}$$

□

3. 设离散型随机变量 X 的分布列为 $P(X=k) = \dfrac{c}{2^k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$ 求常数 c 的值。

解：

$$\begin{aligned}
&\because \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c}{2^k} = 1 \\
&\therefore c \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = c \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2c = 1 \\
&\therefore c = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

□

4. 设随机变量 X 的概率密度函数为 $p(x)=\begin{cases} ce^{-\sqrt{x}}, & x>0 \\ 0, & x\leqslant 0 \end{cases}$，求常数 c。

解：

$$\begin{aligned}
&\because \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\mathrm{d}x = 1 \\
&\therefore \int_{0}^{+\infty} ce^{-\sqrt{x}}\mathrm{d}x = c\int_{0}^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2c = 1 \\
&\therefore c = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

□

5. 设 $X\sim N(10,4)$，求概率 $P(6<X\leqslant 9)$ 和 $P(7\leqslant X<12)$。

解：

$$\begin{aligned}
\mu = 10, \sigma^2 = 4, \sigma = 2& \\
\therefore \frac{x-10}{2} \sim N(0,1)& \\
P(6<X\leqslant 9) &= P(\frac{6-10}{2} < \frac{X-10}{2} \leqslant \frac{9-10}{2}) \\
&= \Phi(\frac{9-10}{2}) - \Phi(\frac{6-10}{2}) \\
&= \Phi(-0.5) - \Phi(-2) \\
&= \Phi(2) - \Phi(0.5) \\
&\approx 0.9772 - 0.6915 \\
&= 0.2857 \\
P(7\leqslant X<12) &= P(\frac{7-10}{2} \leqslant \frac{X-10}{2} < \frac{12-10}{2}) \\
&= \Phi(\frac{12-10}{2} - 0) - \Phi(\frac{7-10}{2} - 0) \\
&= \Phi(1) - \Phi(-1.5) \\
&= \Phi(1) - (1-\Phi(1.5)) \\
&\approx 0.8413 - (1-0.9332) \\
&= 0.7745
\end{aligned}$$

□

6. 设 $X\sim \mathrm{Exp}(\lambda)$，求 λ 使得 $P(X>1)=2P(X>2)$。

解：

由$P(X>1)=2P(X>2)$可知:

$$\begin{aligned}
\int_{1}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x &= 2\int_{2}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x \\
-e^{-\lambda x}\big|_{1}^{+\infty} &= -2\, e^{-\lambda x}\big|_{2}^{+\infty} \\
e^{-\lambda} &= 2e^{-2\lambda} \\
2(e^{-\lambda})^2 - e^{-\lambda} &= 0 \\
e^{-\lambda}(2e^{-\lambda}-1) &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\because e^{-\lambda} \neq 0 \\
&\therefore 2e^{-\lambda} - 1 = 0 \\
&\therefore e^{-\lambda} = \frac{1}{2} \\
&\therefore \lambda = -\ln(\frac{1}{2}) = \ln 2
\end{aligned}$$

□

7. 设随机变量 X 服从几何分布 $\mathrm{Ge}(p)$，求 X 的数学期望 EX。

解：

$$\because 0 < p < 1$$
$$\therefore EX = \sum_{k=1}^{\infty} kp(1-p)^{k-1} = \frac{1}{p}$$

□

8. 设随机变量 X 服从几何分布 $\mathrm{Ge}(p)$，求 X 的方差 $\operatorname{Var} X$。

解：

$$\begin{aligned}
&\because 0 < p < 1 \\
\therefore \operatorname{Var} X &= EX^2 - (EX)^2 \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 p(1-p)^{k-1} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 \\
&= \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} \\
&= \frac{1-p}{p^2}
\end{aligned}$$

□

9. 设随机变量 X 服从 Gamma 分布 $\mathrm{Ga}(\alpha, \lambda)$，求数学期望 EX^n。

解：

$$\begin{aligned}
EX^n &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^n p(x) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{+\infty} x^n \cdot \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\lambda^n \Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} (\lambda x)^{n+\alpha-1} e^{-\lambda x} \mathrm{d}(\lambda x) \\
&= \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\lambda^n \Gamma(\alpha)} \\
&= \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{\lambda^n}
\end{aligned}$$

□

10. 设随机变量 X 服从均匀分布 $U(0,1)$，计算随机变量 X^3 的方差。

解：

$$\text{由题意可知，}X\text{的概率密度函数为}p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0\text{或}x > 1 \\ 1, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Var} X^3 &= E(X^3)^2 - (EX^3)^2 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x^6 p(x)\mathrm{d}x - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 p(x)\mathrm{d}x\right)^2 \\
&= \int_0^1 x^6 \mathrm{d}x - \left(\int_0^1 x^3 \mathrm{d}x\right)^2 \\
&= \frac{9}{112} \\
&\approx 0.0803571428571429
\end{aligned}
$$

□

第四章　单元作业 4

1. 若二维离散型随机变量 (X,Y) 有联合分布列如下：

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	0

求 X 与 Y 的边际分布列。

解：

X 和 Y 的边际分布列分别为

X	0	1
P	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{8}$

Y	0	1	2
P	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$

□

2. 设随机变量 (X,Y) 的概率密度函数为

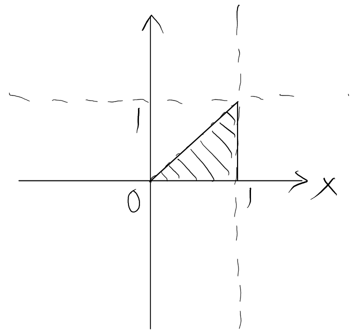
$$p(x,y)=\begin{cases}3x, & 若0<y<x<1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

求 X 与 Y 的边际概率密度函数，并判断 X 与 Y 是否互相独立。

解：

$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^x 3x\mathrm{d}y, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & x<0或x>1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}3x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & x<0或x>1\end{cases}$$



$$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_y^1 3x\mathrm{d}x, & 0\leqslant y\leqslant 1\\ 0, & x<0\text{或}x>1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{3}{2}-\frac{3}{2}y^2, & 0\leqslant y\leqslant 1\\ 0, & y<0\text{或}y>1\end{cases}$$

$p(1,1)=3, p_X(1)=3, p_Y(1)=0$，于是 $p(1,1)\neq p_X(1)\cdot p_Y(1)$，所以 X 和 Y 互相不独立。

□

3. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 X 服从均匀分布 $U(0,1)$，Y 服从指数分布 $\mathrm{Exp}(1)$。求

(1) (X,Y) 的联合概率密度函数 $p(x,y)$；

解：

$$p_X(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1]\\ 0, & x<0\text{或}x>1\end{cases}\qquad p_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y\geqslant 0\\ 0, & y<0\end{cases}$$

$$p(x,y)=\begin{cases}e^{-y}, & x\in[0,1], y\geqslant 0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

□

(2) 概率 $P(X+Y\leqslant 1)$；

解：

令 $Z=X+Y$，则随机变量 Z 的概率密度函数为

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_X(x)p_Y(z-x)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_0^1 e^{x-z}\mathrm{d}x, & z>1\\ \int_0^z e^{x-z}\mathrm{d}x, & 0\leqslant z\leqslant 1\\ 0, & z<0\end{cases}=\begin{cases}e^{1-z}-e^{-z}, & z>1\\ 1-e^{-z}, & 0\leqslant z\leqslant 1\\ 0, & z<0\end{cases}$$

所以

$$P(X+Y\leqslant 1)=\int_{-\infty}^{1}p_Z(z)\mathrm{d}z=\int_0^1(1-e^{-z})\mathrm{d}z=1+(\frac{1}{e}-1)=\frac{1}{e}$$

□

(3) 概率 $P(X\leqslant Y)$。

解：令随机变量 $Z=X-Y$，则 Z 的概率密度函数为

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,x-z)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & z>1\\ \int_z^1 e^{z-x}\mathrm{d}x, & 0\leqslant z\leqslant 1\\ \int_0^1 e^{z-x}\mathrm{d}x, & z<0\end{cases}=\begin{cases}0, & z>1\\ 1-e^{z-1}, & 0\leqslant z\leqslant 1\\ e^z-e^{z-1}, & z<0\end{cases}$$

所以

$$P(X \leqslant Y) = P(X - Y \leqslant 0) = \int_{-\infty}^{0} (e^z - e^{z-1})\mathrm{d}z = 1 - \frac{1}{e}$$

$\square$

4. 设随机变量 (X, Y) 的概率密度函数为

$$p(x, y) = \begin{cases} Ae^{-(3x+2y)}, & x > 0, y > 0; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

求:

(1) 常数 A 的值;

解 :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} Ae^{-(3x+2y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{0}^{+\infty} -\frac{1}{3}Ae^{-(3x+2y)}\Big|_{0}^{+\infty}\mathrm{d}y$$
$$= \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{3}Ae^{-2y}\mathrm{d}y = -\frac{1}{6}Ae^{-2y}\Big|_{0}^{+\infty} = \frac{1}{6}A = 1$$

所以常数 A 的值为 6。 $\square$

(2) 分布函数 $F(x, y)$;

解 :

由题意可知，当 $x \leqslant 0$ 或 $y \leqslant 0$ 时，$F(x, y) = 0$。

当 $x > 0, y > 0$ 时，$F(x, y) = \int_{0}^{y}\int_{0}^{x} 6e^{-(3u+2v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_{0}^{y} -2e^{-(3u+2v)}\big|_{0}^{x}\mathrm{d}v = \int_{0}^{y}\left(2e^{-2v} - 2e^{-(3x+2v)}\right)\mathrm{d}v = -e^{-2v}\big|_{0}^{y} + e^{-(3x+2v)}\big|_{0}^{y} = -e^{-2y} + 1 + e^{-(3x+2y)} - e^{-3x} = e^{-(3x+2y)} - e^{-3x} - e^{-2y} + 1$

所以

$$F(x, y) = \begin{cases} e^{-(3x+2y)} - e^{-3x} - e^{-2y} + 1, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$\square$

(3) 概率 $P(-2 < X \leqslant 2, -3 < Y \leqslant 3)$。

解 :

$$\begin{aligned} &P(-2 < X \leqslant 2, -3 < Y \leqslant 3) = P(X \leqslant 2, Y \leqslant 3) = F(2, 3) \\ =&e^{-(3\times2+2\times3)} - e^{-3\times2} - e^{-2\times3} + 1 \\ =&1 + e^{-12} - 2e^{-6} \end{aligned}$$

$\square$

第五章　单元作业 5

1. 设随机变量 X 与 Y 满足 $EX = EY = 0$, $\operatorname{Var} X = \operatorname{Var} Y = 1$, $\operatorname{Cov}(X,Y) = \rho$，证明 $E\max(X^2,Y^2) \leqslant 1+\sqrt{1-\rho^2}$

证明：

因为 $\operatorname{Cov}(X,Y) = EXY - EXEY = \rho$，而 $EX = EY = 0$，所以 $EXY = \rho$。
而 $\operatorname{Var} X = EX^2 - (EX)^2 = EX^2 = 1$，$\operatorname{Var} Y = EY^2 - (EY)^2 = EY^2 = 1$。

根据 $\max(a,b) = \frac{|a+b|+|a-b|}{2}$ 和期望的线性性质，

$$E\max(X^2,Y^2) = E\frac{|X^2+Y^2|+|X^2-Y^2|}{2} = \frac{1}{2}E\left|X^2+Y^2\right| + \frac{1}{2}E\left|X^2-Y^2\right| \tag{1}$$

其中，$E\left|X^2+Y^2\right| = E(X^2+Y^2) = EX^2+EY^2 = 2$，$E\left|X^2-Y^2\right| = E\left|X+Y\right|\left|X-Y\right|$。
根据 Cauchy-Schwarz 不等式，$(E\left|X+Y\right|\left|X-Y\right|)^2 \leqslant E\left|X+Y\right|^2 E\left|X-Y\right|^2$。

其中 $E\left|X+Y\right|^2 = E(X^2+2XY+Y^2) = EX^2+2EXY+EY^2 = 2+2\rho$，
$E\left|X-Y\right|^2 = E(X^2-2XY+Y^2) = EX^2-2XY+EY^2 = 2-2\rho$。

因此 $(E\left|X+Y\right|\left|X-Y\right|)^2 \leqslant (2+2\rho)(2-2\rho) = 4(1-\rho^2)$，两边同取根号可得

$$E\left|X^2-Y^2\right| = E\left|X+Y\right|\left|X-Y\right| \leqslant 2\sqrt{1-\rho^2}$$

再代入回 (1)，即可得到

$$E\max(X^2,Y^2) \leqslant \frac{1}{2}\times 2 + \frac{1}{2}\times 2\sqrt{1-\rho^2} = 1+\sqrt{1-\rho^2}$$

□

2. 设随机变量 (X,Y) 服从均匀分布 $U(D)$，其中 $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant 1\}$，求 X 与 Y 的协方差。

解：

设 $p(x,y)$ 表示随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数，则可以得到

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \notin D \end{cases}$$

$$EX = \iint xp(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D x \cdot \frac{1}{\pi}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \xlongequal{\text{对称性}} 0$$

$$EY = \iint yp(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D y \cdot \frac{1}{\pi}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \xlongequal{\text{对称性}} 0$$

$$EXY = \iint xyp(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D xy \cdot \frac{1}{\pi}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \xlongequal{\text{对称性}} 0$$

所以 X 与 Y 的协方差为

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = EXY - EXEY = 0$$

□

3. 设随机变量 (X,Y) 服从均匀分布 $U(D)$，其中 $D = \{(x,y) \mid 0 < x < y < 1\}$，求相关系数 $\mathrm{Corr}(X,Y)$。

解：

设 $p(x,y)$ 表示随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数，则可以得到

$$p(x,y) = \begin{cases} 2, & 0 < x < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$EX = \iint xp(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D x \cdot 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^y 2x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{3}$$

$$EY = \iint yp(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D y \cdot 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^y 2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{2}{3}$$

$$EXY = \iint xyp(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D xy \cdot 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^y 2xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{4}$$

所以 X 与 Y 的协方差为

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = EXY - EXEY = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{36}$$

还需要计算

$$EX^2 = \iint x^2p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D x^2 \cdot 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^y 2x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{6}$$

$$EY^2 = \iint y^2p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D y^2 \cdot 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^y 2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}$$

所以 X 与 Y 的相关系数为

$$\mathrm{Corr}(X,Y)=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}\,X\cdot\mathrm{Var}\,Y}}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{(EX^2-(EX)^2)\cdot(EY^2-(EY)^2)}}$$
$$=\frac{\frac{1}{36}}{\sqrt{\left(\frac{1}{6}-\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)\left(\frac{1}{2}-\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)}}=\frac{1}{2}$$

□

4. 设随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数为 $p(x,y)=\begin{cases}e^{-y}, & 0<x<y\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$, 设 $y>0$, 求在 $Y=y$ 时 X 的条件概率密度函数 $p_{X|Y}(x|y)$，条件数学期望 $E(X|Y=y)$。进一步地，利用重期望公式求 EX。

解：

先计算边际概率密度函数

$$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_0^y e^{-y}\mathrm{d}x, & y>0\\ 0, & y\leqslant 0\end{cases}=\begin{cases}ye^{-y}, & y>0\\ 0, & y\leqslant 0\end{cases}$$

之后计算条件概率密度函数

$$p_{X|Y}(x|y)=\frac{p(x,y)}{p_Y(y)}=\begin{cases}\frac{1}{y}, & 0<x<y\\ 0, & 0<y\leqslant x\text{或}y>0,x\leqslant 0\end{cases}$$

根据数学期望的定义，

$$E(X|Y=y)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp_{X|Y}(x|y)\mathrm{d}x=\int_0^y x\cdot\frac{1}{y}\mathrm{d}x=\frac{y}{2}$$

再利用重期望公式，

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}E(X|Y=y)p_Y(y)\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\frac{y}{2}\cdot ye^{-y}\mathrm{d}y=1$$

□

5. 设 X 服从指数分布 $\mathrm{Exp}(\lambda)$，求 $Y=[X]$ 的分布。(这里符号 $[a]$ 表示不超过 a 的最大整数。

解：

由于 $Y=[X]$ 是离散型分布，所以求出 Y 的分布列即可

$$p_i=\int_i^{i+1}\lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x=(e^{\lambda}-1)e^{-\lambda(i+1)}$$

□

6. 设随机变量 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$, $a>0$，记 $Y=\begin{cases}X, & |X|<a\\ -X, & |X|\geqslant a\end{cases}$，求随机变量 Y 的分布。

解：

因为 $X\sim N(0,1)$，所以 $-X\sim N(0,1)$，所以随机变量 Y 服从标准正态分布 $N(0,1)$，即

$$Y\sim N(0,1)$$

□

7. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}2, & 若0<x<y<1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

求

(1) 随机变量 $T=X-Y$ 的概率密度函数 $p_T(t)$；

(2) 概率 $P(Y-X\leqslant\frac{1}{2})$。

解：

(1) 根据连续情形的卷积公式，

$$p_T(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,x-t)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_0^{t+1}2\mathrm{d}x, & -1<t<0\\ 0, & t\leqslant -1或t\geqslant 0\end{cases}=\begin{cases}2t+2, & -1<t<0\\ 0, & t\leqslant -1或t\geqslant 0\end{cases}$$

(2)

$$P(Y-X\leqslant\frac{1}{2})=P(X-Y\geqslant\frac{1}{2})=P(T\geqslant\frac{1}{2})=0$$

□

8. 设 X 与 Y 独立同分布，共同分布为 $N(0,1)$，求概率 $P(|X+Y|\leqslant|X-Y|)$。

解：

$$
\begin{aligned}
P(|X+Y| \leqslant |X-Y|) &= P\left((X+Y)^2 \leqslant (X-Y)^2\right) \\
&= P(X^2 + 2XY + Y^2 \leqslant X^2 - 2XY + Y^2) \\
&= P(4XY \leqslant 0) \\
&= P(XY \leqslant 0) \\
&= P(X \leqslant 0, Y > 0) + P(X > 0, Y \leqslant 0) \\
&\xlongequal{X\text{与}Y\text{独立}} P(X \leqslant 0)P(Y > 0) + P(X > 0)P(Y \leqslant 0) \\
&\xlongequal{X\sim N(0,1), Y\sim N(0,1)} \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

□

第六章　单元作业 6

1. 证明随机变量 X 的特征函数是实值函数当且仅当 X 与 $-X$ 同分布。

证明：

设 X 的特征函数为 $f_X(t)$，则

$$\begin{aligned}
X\text{的特征函数是实值函数} &\iff f_X(t) = \overline{f_X(t)} \\
&\iff f_X(t) = f_X(-t) \\
&\iff Ee^{itX} = Ee^{i(-t)X} \\
&\iff Ee^{itX} = Ee^{it(-X)} \\
&\iff f_X(t) = f_{-X}(t) \\
&\iff X\text{与}-X\text{同分布}
\end{aligned}$$

□

2. 设随机变量 X 的特征函数为 $f(t) = \left(\frac{2-it}{2}\right)^{-2}$，求 EX 和 $\operatorname{Var} X$。

解：

根据特征函数的性质，可知

$$iEX = f'(t)|_{t=0} = \left(-\frac{i}{2} \cdot (-2) \left(\frac{2-it}{2} \right)^{-3} \right) \Bigg|_{t=0} = i \cdot 1^{-3} = i$$

$$-EX^2 = i^2 EX^2 = f''(t)|_{t=0} = \left(i \cdot \left(-\frac{i}{2} \right) \cdot (-3) \left(\frac{2-it}{2} \right)^{-4} \right) \Bigg|_{t=0} = \left(-\frac{3}{2} \right) \cdot 1^{-4} = -\frac{3}{2}$$

所以有

$$EX = 1, \qquad EX^2 = \frac{3}{2}, \qquad \operatorname{Var} X = EX^2 - (EX)^2 = \frac{3}{2} - 1^2 = \frac{1}{2}$$

□

3. 设 X_i 独立同分布，且 $X_i \sim \operatorname{Exp}(\lambda), i = 1, 2, \ldots, n$。试用特征函数的方法证明：

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \operatorname{Ga}(n, \lambda)$$

证明：

根据题意可知 X_i 的概率密度函数为 $p(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$。根据特征函数的定义，计算 X_i 的特征函数 $f(t)$：

$$
\begin{aligned}
f(t)=Ee^{itX_i}&=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}p(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}e^{itx}\lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x=\frac{\lambda}{it-\lambda}\int_0^{+\infty}e^{(it-\lambda)x}\mathrm{d}(it-\lambda)x\\
&=\frac{\lambda}{it-\lambda}\cdot e^{(it-\lambda)x}\Big|_0^{+\infty}=\frac{\lambda}{it-\lambda}\cdot\left(\lim_{x\to+\infty}e^{itx-\lambda x}-1\right)=\frac{\lambda}{it-\lambda}\cdot\left(\lim_{x\to+\infty}e^{-\lambda x}e^{itx}-1\right)
\end{aligned}
$$

对于 $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-\lambda x}e^{itx}$，设 $a=e^{-\lambda x}e^{itx}$，将其看作复数的模长辐角表示法，则 a 的模长为 $e^{-\lambda x}$，辐角为 tx。由于 $\lambda>0$，所以当 $x\to+\infty$ 时，a 的模长 $e^{-\lambda x}\to 0$（辐角 $tx\to+\infty$，但不重要），因此 $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-\lambda x}e^{itx}=\lim\limits_{x\to+\infty}a=0$。

于是 $f(t)=\dfrac{\lambda}{it-\lambda}\cdot(0-1)=\dfrac{\lambda}{\lambda-it}$。

由于 X_i 相互独立，所以 Y_n 的特征函数为：

$$
g(t)=[f(t)]^n=\left(\frac{\lambda}{\lambda-it}\right)^n
$$

再计算 $Y\sim\mathrm{Ga}(n,\lambda)$ 的特征函数：

$$
\begin{aligned}
h(t)=Ee^{itY}&=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}p(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}e^{itx}\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}x^{n-1}e^{-\lambda x}\mathrm{d}x\\
&=\frac{\lambda^n}{(\lambda-it)^n}\int_0^{+\infty}\frac{(\lambda-it)^n}{\Gamma(n)}x^{n-1}e^{(it-\lambda)x}\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

注意到 $\dfrac{(\lambda-it)^n}{\Gamma(n)}x^{n-1}e^{(it-\lambda)}$（零延拓后）为 $\mathrm{Ga}(n,\lambda-it)$ 的概率密度函数，根据分布函数的正则性，$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{(\lambda-it)^n}{\Gamma(n)}x^{n-1}e^{(it-\lambda)}\mathrm{d}x=1$，所以

$$
h(t)=\frac{\lambda^n}{(\lambda-it)^n}=\left(\frac{\lambda}{\lambda-it}\right)^n=g(t)
$$

根据特征函数的唯一性，Y_n 与 Y 同分布，即

$$
Y_n=\sum_{i=1}^n X_i\sim\mathrm{Ga}(n,\lambda)
$$

□

4. 设 $X_n\xrightarrow{P}X, X_n\xrightarrow{P}Y$。证明 $P(X=Y)=1$。

证明：

根据依概率收敛的运算性质，有

$$
0=X_n-X_n\xrightarrow{P}X-Y
$$

即对任意的 $\varepsilon > 0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P(|0-(X-Y)| \geqslant \varepsilon) = \lim_{n\to\infty} P(|X-Y| \geqslant \varepsilon) = P(|X-Y| \geqslant \varepsilon) = 0$$

令 $\varepsilon \to 0$，则根据概率的下连续性，可得

$$P(|X-Y| > 0) = 0$$

由于 $|X-Y| \geqslant 0$，所以

$$P(|X-Y| = 0) = 1 - P(|X-Y| > 0) = 1$$

即 $P(X=Y)=1$。

□

5. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} E\left(\dfrac{|X_n|}{1+|X_n|}\right) = 0$ 当且仅当 $X_n \xrightarrow{P} 0$。

证明：

对任意的 $\varepsilon > 0$，$1 = 1_{\{|X_n|\leqslant\varepsilon\}} + 1_{\{|X_n|>\varepsilon\}}$。所以有如下不等式：

$$\begin{aligned}\frac{|X_n|}{1+|X_n|} &= \frac{|X_n|}{1+|X_n|}1_{\{|X_n|\leqslant\varepsilon\}} + \frac{|X_n|}{1+|X_n|}1_{\{|X_n|>\varepsilon\}} \\ &\leqslant |X_n|\,1_{\{|X_n|\leqslant\varepsilon\}} + 1_{\{|X_n|>\varepsilon\}} \leqslant \varepsilon + 1_{\{|X_n|>\varepsilon\}}\end{aligned}$$

等式两边同时取期望，则

$$E\left(\frac{|X_n|}{1+|X_n|}\right) \leqslant E(\varepsilon + 1_{\{|X_n|>\varepsilon\}}) = \varepsilon + E(1_{\{|X_n|>\varepsilon\}})$$

若 $X_n \xrightarrow{P} 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} P(|X_n| > \varepsilon) = 0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} E(1_{\{|X_n|>\varepsilon\}}) = 0$。于是上述不等式两边同时取 $n \to 0$ 时的极限可得

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\frac{|X_n|}{1+|X_n|}\right) \leqslant \varepsilon$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} E\left(\dfrac{|X_n|}{1+|X_n|}\right) = 0$。

若 $\lim\limits_{n\to\infty} E\left(\dfrac{|X_n|}{1+|X_n|}\right) = 0$，这里使用和书上不同的方法。根据马尔可夫不等式的一般形式，有

$$P(|X_n| > \varepsilon) \leqslant \frac{E\left(\frac{|X_n|}{1+|X_n|}\right)}{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}$$

不等式两边同时取 $n \to 0$ 时的极限可得 $\lim\limits_{n\to\infty} P(|X_n| > \varepsilon) = 0$，即 $X_n \xrightarrow{P} 0$。

□