第一章　单元作业 6

1. 证明随机变量 X 的特征函数是实值函数当且仅当 X 与 $-X$ 同分布。

证明：

设 X 的特征函数为 $f_X(t)$，则

$$\begin{aligned} X\text{的特征函数是实值函数} &\iff f_X(t)=\overline{f_X(t)} \\ &\iff f_X(t)=f_X(-t) \\ &\iff Ee^{itX}=Ee^{i(-t)X} \\ &\iff Ee^{itX}=Ee^{it(-X)} \\ &\iff f_X(t)=f_{-X}(t) \\ &\iff X\text{与}-X\text{同分布} \end{aligned}$$

□

2. 设随机变量 X 的特征函数为 $f(t)=\left(\frac{2-it}{2}\right)^{-2}$，求 EX 和 $\operatorname{Var}X$。

解：

根据特征函数的性质，可知

$$iEX=f'(t)|_{t=0}=\left(-\frac{i}{2}\cdot(-2)\left(\frac{2-it}{2}\right)^{-3}\right)\bigg|_{t=0}=i\cdot 1^{-3}=i$$

$$-EX^2=i^2EX^2=f''(t)|_{t=0}=\left(i\cdot\left(-\frac{i}{2}\right)\cdot(-3)\left(\frac{2-it}{2}\right)^{-4}\right)\bigg|_{t=0}=\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot 1^{-4}=-\frac{3}{2}$$

所以有

$$EX=1,\qquad EX^2=\frac{3}{2},\qquad \operatorname{Var}X=EX^2-(EX)^2=\frac{3}{2}-1^2=\frac{1}{2}$$

□

3. 设 X_i 独立同分布，且 $X_i\sim\operatorname{Exp}(\lambda), i=1,2,\dots,n$。试用特征函数的方法证明：

$$Y_n=\sum_{i=1}^n X_i\sim\operatorname{Ga}(n,\lambda)$$

证明：

根据题意可知 X_i 的概率密度函数为 $p(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$。根据特征函数的定义，计算 X_i 的特征函数 $f(t)$:

$$\begin{aligned} f(t)=Ee^{itX_i}&=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}p(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}e^{itx}\lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x=\frac{\lambda}{it-\lambda}\int_0^{+\infty}e^{(it-\lambda)x}\mathrm{d}(it-\lambda)x \\ &=\frac{\lambda}{it-\lambda}\cdot e^{(it-\lambda)x}\Big|_0^{+\infty}=\frac{\lambda}{it-\lambda}\cdot\left(\lim_{x\to+\infty}e^{itx-\lambda x}-1\right)=\frac{\lambda}{it-\lambda}\cdot\left(\lim_{x\to+\infty}e^{-\lambda x}e^{itx}-1\right) \end{aligned}$$

对于 $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-\lambda x}e^{itx}$，设 $a=e^{-\lambda x}e^{itx}$，将其看作复数的模长辐角表示法，则 a 的模长为 $e^{-\lambda x}$，辐角为 tx。由于 $\lambda>0$，所以当 $x\to+\infty$ 时，a 的模长 $e^{-\lambda x}\to 0$（辐角 $tx\to+\infty$，但不重要），因此 $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-\lambda x}e^{itx}=\lim\limits_{x\to+\infty}a=0$。

于是 $f(t)=\dfrac{\lambda}{it-\lambda}\cdot(0-1)=\dfrac{\lambda}{\lambda-it}$。

由于 X_i 相互独立，所以 Y_n 的特征函数为：

$$g(t)=[f(t)]^n=\left(\frac{\lambda}{\lambda-it}\right)^n$$

再计算 $Y\sim\operatorname{Ga}(n,\lambda)$ 的特征函数：

$$\begin{aligned} h(t)=Ee^{itY}&=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}p(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}e^{itx}\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}x^{n-1}e^{-\lambda x}\mathrm{d}x \\ &=\frac{\lambda^n}{(\lambda-it)^n}\int_0^{+\infty}\frac{(\lambda-it)^n}{\Gamma(n)}x^{n-1}e^{(it-\lambda)x}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

注意到 $\dfrac{(\lambda-it)^n}{\Gamma(n)}x^{n-1}e^{(it-\lambda)}$（零延拓后）为 $\operatorname{Ga}(n,\lambda-it)$ 的概率密度函数，根据分布函数的正则性，$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{(\lambda-it)^n}{\Gamma(n)}x^{n-1}e^{(it-\lambda)}\mathrm{d}x=1$，所以

$$h(t)=\frac{\lambda^n}{(\lambda-it)^n}=\left(\frac{\lambda}{\lambda-it}\right)^n=g(t)$$

根据特征函数的唯一性，Y_n 与 Y 同分布，即

$$Y_n=\sum_{i=1}^n X_i\sim\operatorname{Ga}(n,\lambda)$$

□

4. 设 $X_n\xrightarrow{P}X, X_n\xrightarrow{P}Y$。证明 $P(X=Y)=1$。

证明：

根据依概率收敛的运算性质，有

$$0=X_n-X_n\xrightarrow{P}X-Y$$

即对任意的 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P(|0-(X-Y)|\geqslant\varepsilon)=\lim_{n\to\infty}P(|X-Y|\geqslant\varepsilon)=P(|X-Y|\geqslant\varepsilon)=0$$

令 $\varepsilon\to 0$，则根据概率的下连续性，可得

$$P(|X-Y|>0)=0$$

由于 $|X-Y|\geqslant 0$，所以

$$P(|X-Y|=0)=1-P(|X-Y|>0)=1$$

即 $P(X=Y)=1$。

□

5. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}E\left(\dfrac{|X_n|}{1+|X_n|}\right)=0$ 当且仅当 $X_n\xrightarrow{P}0$。

证明：

对任意的 $\varepsilon>0$，$1=1_{\{|X_n|\leqslant\varepsilon\}}+1_{\{|X_n|>\varepsilon\}}$。所以有如下不等式：

$$\begin{aligned} \frac{|X_n|}{1+|X_n|}&=\frac{|X_n|}{1+|X_n|}1_{\{|X_n|\leqslant\varepsilon\}}+\frac{|X_n|}{1+|X_n|}1_{\{|X_n|>\varepsilon\}} \\ &\leqslant|X_n|\,1_{\{|X_n|\leqslant\varepsilon\}}+1_{\{|X_n|>\varepsilon\}}\leqslant\varepsilon+1_{\{|X_n|>\varepsilon\}} \end{aligned}$$

等式两边同时取期望，则

$$E\left(\frac{|X_n|}{1+|X_n|}\right)\leqslant E(\varepsilon+1_{\{|X_n|>\varepsilon\}})=\varepsilon+E(1_{\{|X_n|>\varepsilon\}})$$

若 $X_n\xrightarrow{P}0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}P(|X_n|>\varepsilon)=0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}E(1_{\{|X_n|>\varepsilon\}})=0$。于是上述不等式两边同时取 $n\to 0$ 时的极限可得

$$\lim_{n\to\infty}E\left(\frac{|X_n|}{1+|X_n|}\right)\leqslant\varepsilon$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}E\left(\dfrac{|X_n|}{1+|X_n|}\right)=0$。

若 $\lim\limits_{n\to\infty}E\left(\dfrac{|X_n|}{1+|X_n|}\right)=0$，这里使用和书上不同的方法。根据马尔可夫不等式的一般形式，有

$$P(|X_n|>\varepsilon)\leqslant\frac{E\left(\frac{|X_n|}{1+|X_n|}\right)}{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}$$

不等式两边同时取 $n\to 0$ 时的极限可得 $\lim\limits_{n\to\infty}P(|X_n|>\varepsilon)=0$，即 $X_n\xrightarrow{P}0$。

□