第一章　单元作业 2

1. 三人独立地对同一目标进行射击, 各人击中目标的概率分别是 0.7, 0.8, 0.6, 求目标被击中的概率.

   解 :

$$\begin{aligned}
&\text{将三人击中目标的事件分别表示为}A\text{、}B\text{、}C\text{，}\\
&\text{则}P(A)=0.7, P(B)=0.8, P(C)=0.6,\\
&P(\text{目标被击中})=P(A\cup B\cup C)\\
&\because \text{三人独立射击}\\
&\therefore A\text{、}B\text{、}C\text{相互独立}\\
&\therefore \overline{A}\text{、}\overline{B}\text{、}\overline{C}\text{相互独立}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore P(A\cup B\cup C) &= P(\overline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}}) = 1-P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})\\
&= 1-P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})\\
&= 1-(1-P(A))(1-P(B))(1-P(C))\\
&= 1-(1-0.7)*(1-0.8)*(1-0.6)\\
&= 0.976
\end{aligned}$$

□

2. 制作某个产品有两个关键工序, 第一道和第二道工序的不合格品的概率分别为 3% 和 5%, 假定两道工序互不影响, 试问该产品为不合格品的概率 (答案保留至小数点后 4 位).

   解 :

$$\begin{aligned}
&\text{令}A\text{：第一道工序不合格，}B\text{：第二道工序不合格}\\
&\text{则}P(A)=0.03\text{，}P(B)=0.05\\
&\text{则}P(\text{该产品为不合格品})=P(A\cup B)\\
&\because \text{两道工序互不影响}\\
&\therefore A\text{与}B\text{相互独立}\\
&\therefore \overline{A}\text{与}\overline{B}\text{相互独立}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore P(A\cup B) &= P(\overline{\bar{A}\,\bar{B}}) = 1-P(\bar{A}\,\bar{B})\\ &= 1-P(\bar{A})P(\bar{B})\\ &= 1-(1-P(A))(1-P(B))\\ &= 1-(1-0.03)(1-0.05)\\ &= 0.0785\end{aligned}$$

□

3. **甲乙丙三个同学同时独立参加考试, 不及格的概率分别为: 0.2, 0.3, 0.4,**

(1) 求恰有 2 位同学不及格的概率;

(2) 若已知 3 位同学中有 2 位不及格, 求其中 1 位是同学乙的概率.

解 :

$$\begin{aligned}&\text{设}A\text{、}B\text{、}C\text{分别表示事件甲不合格、乙不合格、丙不合格}\\ &\text{则}P(A)=0.2,P(B)=0.3,P(C)=0.4\\ &P(\bar{A})=0.8,P(\bar{B})=0.7,P(\bar{C})=0.6\\ &\text{且}A\text{、}B\text{、}C\text{相互独立}\end{aligned}$$

(1)

$$\begin{aligned}P(\text{恰有2位同学不合格}) &= P(AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC)\\ &= P(A)P(B)P(\bar{C})+P(A)P(\bar{B})P(C)+P(\bar{A})P(B)P(C)\\ &= 0.2\times0.3\times0.6+0.2\times0.7\times0.4+0.8\times0.3\times0.4\\ &= 0.188\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}P(\text{其中1位是同学乙}) &= P(B\mid \text{恰有2位同学不合格})\\ &= \frac{P(B\cap\text{恰有2位同学不合格})}{P(\text{恰有2位同学不合格})}\\ &= \frac{P(AB\bar{C}+\bar{A}BC)}{P(AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC)}\\ &= \frac{P(A)P(B)P(\bar{C})+P(\bar{A})P(B)P(C)}{P(A)P(B)P(\bar{C})+P(A)P(\bar{B})P(C)+P(\bar{A})P(B)P(C)}\\ &= \frac{0.2\times0.3\times0.6+0.8\times0.3\times0.4}{0.2\times0.3\times0.6+0.2\times0.7\times0.4+0.8\times0.3\times0.4}\\ &= \frac{33}{47}\\ &\approx 0.702127659574468\end{aligned}$$

□

4. 甲袋中装有 2 个白球和 4 个黑球, 乙袋中装有 3 个白球和 2 个黑球, 现随机地从乙袋中取出一球放入甲袋, 然后从甲袋中随机取出一球, 试求从甲袋中取得的球是白球的概率.

解：

$$\text{设}A\text{表示从乙袋中取出的是白球，}B\text{表示从甲袋中取出的是白球}$$

$$\begin{aligned}
\text{则}P(B) &= P(A)P(B|A) + P(\overline{A})P(B|\overline{A}) \\
&= \frac{3}{3+2} \times \frac{2+1}{2+4+1} + \frac{2}{3+2} \times \frac{2}{2+4+1} \\
&= \frac{13}{35} \\
&\approx 0.371428571428571
\end{aligned}$$

□

5. 设 n 只罐子的每一只中装有 4 个白球和 6 个黑球, 另有一只罐子中装有 5 个白球和 5 个黑球. 从这 n+1 个罐子中随机地选择一只罐子, 从中任取两个球, 结果发现两个都是黑球. 已知在此条件下, 有 5 个白球和 3 个黑球留在选出的罐子中的条件概率是 1/7, 求 n 的值.

解：

$$\begin{aligned}
&\text{设}A\text{表示事件：选中的是第}n+1\text{个罐子} \\
&\text{设}B\text{表示事件：取出的两个都是黑球} \\
&\text{则事件：有5个白球和3个黑球留在选出的罐子中，} \\
&\text{即选中的是第}n+1\text{个罐子，并且取出的两个都是黑球，可表示为}AB \\
&\therefore P(A|B) = \frac{1}{7}, P(A) = \frac{1}{n+1} \\
&P(B|A) = \frac{\mathrm{C}_5^2}{\mathrm{C}_{10}^2} = \frac{2}{9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore P(B) &= P(A)P(B|A) + P(\overline{A})P(B|\overline{A}) \\
&= \frac{1}{n+1} \times \frac{\mathrm{C}_5^2}{\mathrm{C}_{10}^2} + \frac{n}{n+1} \times \frac{\mathrm{C}_6^2}{\mathrm{C}_{10}^2} \\
&= \frac{3n+2}{9(n+1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore P(A|B) &= \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)} \\
&= \frac{\frac{1}{n+1} \times \frac{2}{9}}{\frac{3n+2}{9(n+1)}} \\
&= \frac{2}{3n+2} = \frac{1}{7} \\
&\therefore n = 4
\end{aligned}$$

□

6. 设有三张卡片, 第一张两面皆为红色, 第二张两面皆为黄色, 第三张一面是红色一面是黄色. 随机地选择一张卡片并随机地选择其中一面. 如果已知此面是红色, 求另一面也是红色的概率.

解：

设A、B、C分别表示选到了第一、二、三张卡片，设R表示选择的一面是红色。

则$P(A) = P(B) = P(C) = \dfrac{1}{3}$

$P(R|A) = 1, P(R|B) = 0, P(R|C) = \dfrac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
\text{则}P(\text{另一面也是红色}) &= P(A|R) \\
&= \frac{P(A)P(R|A)}{P(A)P(R|A) + P(B)P(R|B) + P(C)P(R|C)} \\
&= \frac{\frac{1}{3}\times 1}{\frac{1}{3}\times 1 + \frac{1}{3}\times 0 + \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}} \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

□

7. 从装有 r 个红球和 w 个白球的盒子中不返回的取出两只, 求事件“第一只为红球, 第二只为白球”的概率.

解：

设A表示取出的两只球一红一白

$$\text{则}P(\text{第一只为红球，第二只为白球}) = \frac{P(A)}{\mathrm{P}_2^2}$$

$$= \frac{\frac{\mathrm{C}_r^1\mathrm{C}_w^1}{\mathrm{C}_{r+w}^2}}{\mathrm{P}_2^2}$$

$$= \frac{\frac{\binom{r}{1}\binom{w}{1}}{\binom{r+w}{2}}}{2!}$$

$$= \frac{rw}{(r+w)(r+w-1)}$$

□

8. 已知 $P(A) = \frac{1}{4}, P(B|A) = \frac{1}{3}, P(A|B) = \frac{1}{2}$, 求概率 $P(A \cup B)$。

解：

$$P(AB) = P(B|A)P(A) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$P(B) = \frac{P(AB)}{P(A|B)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}$$

$$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12}$$

$$= \frac{1}{3}$$

□

9. 设 $P(A) = P(B) = \frac{1}{3}, P(A|B) = \frac{1}{6}$，求概率 $P(\overline{A}|\overline{B})$。

解：

$$P(AB) = P(B)P(A|B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$$

$$P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(AB))$$

$$= 1 - (\frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{18}) = \frac{7}{18}$$

$$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore P(\overline{A}|\overline{B}) = \frac{P(\overline{A}\,\overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{\frac{7}{18}}{\frac{2}{3}} = \frac{7}{12}$$

□