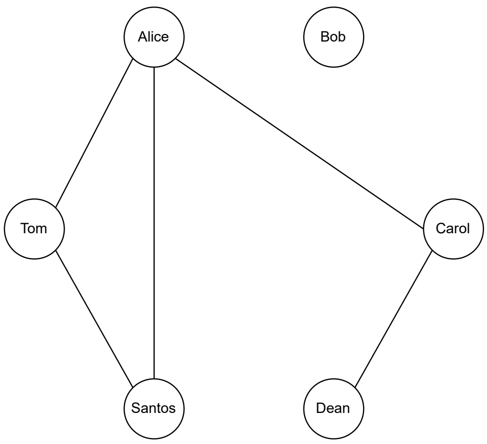
第七章　图论基础

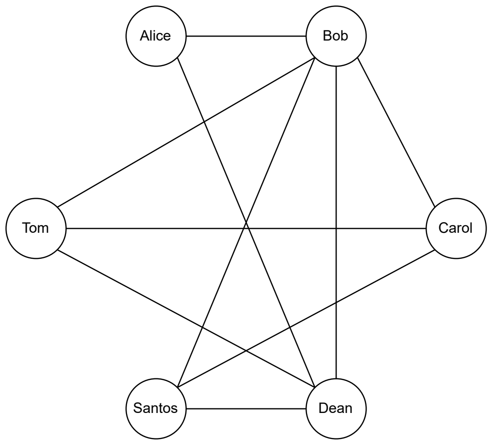
7.1　图及其表示

1. 6 个学生：Alice、Bob、Carol、Dean、Santos 和 tom，其中，Alice 和 Carol 不和，Dean 和 Carol 不和，Santos、Tom 和 Alice 两两不和。请给出表示这种情形的图模型。

   用顶点表示学生，如果两个学生之间不和则连一条无向边，则可以表示成左图；如果两个学生相和则连一条无向边，则可以表示成右图。



(a) 不和图



(b) 相和图

2. 至少含一个顶点的 C_3 的子图有多少个?

   解：

   含一个顶点的，点的情况有 $\mathrm{C}_3^1 = 3$ 种，无法形成边，所以有 $3 \times 1 = 3$ 种情况；

   含两个顶点的，点的情况有 $\mathrm{C}_3^2 = 3$ 种，可以没有边或者有 1 条边，所以有 $3 \times 2 = 6$ 种情况；

   含 3 个顶点的，点的情况有 $\mathrm{C}_3^3 = 1$ 种，边的情况为 2^3 种，所以有 $1 \times 2^3 = 8$ 种情况。

   所以至少含一个顶点的 C_3 的子图有 $3 + 6 + 8 = 17$ 个。

   □

3. 证明：在顶点个数不小于 2 的简单无向图中，必有度数相同的顶点。

   证明：

使用归纳法，首先，对于顶点数为 2 的简单无向图，这两个顶点之间要么有一条边要么没有边，而这两种情况它们的度都是相同的。

假设对于顶点数为 $k(k \geqslant 2)$ 的简单无向图，必有度数相同的顶点。那么对于顶点数为 $k+1$ 的简单无向图，如果存在一个顶点的度为 0，那么去除这个顶点后其他顶点构成 k 个顶点的简单无向图，因此它们之中必有度数相同的顶点。

如果不存在一个顶点的度数为 0，即所有顶点的度数都至少为 1，之后就不会了。

□

4. 对哪些 n 值来说下列图是偶图?

a) K_n	$n = 2$	b) C_n	$n \geqslant 3$ 且为偶数
c) W_n	$n \in \varnothing$	d) Q_n	n 为任意正整数

7.2 握手定理

1. 简单无向图 G 有 n 个顶点，$n+1$ 条边，证明 G 中至少有一个顶点的度大于或等于 3。

证明：

反证法，设 $G = (V, E)$，假设 G 中所有顶点的度都小于 3，即 $\forall v \in V$, $d(v) < 3$ 即 $d(v) \leqslant 2$，又已知 $|V| = n, |E| = n+1$，那么根据握手定理，则有

$$2(n+1) = 2|E| = \sum_{v \in V} d(v) \leqslant 2n$$

而这是不可能的，因此 G 中至少有一个顶点的度大于或等于 3。

□

2. * 一天晚上张先生夫妇参加了一个聚会，参加聚会的人中还有另外三对夫妇，他们相互握了手。假设没有人自己与自己握手，没有夫妻之间的握手，且同两个人握手不超过一次。当其他人告诉张先生，他或她握了多少次手时，答案都不相同。问张先生和太太分别握了几次手?

想了半天也想不出来怎么做。