练习题 3.4

1. 对有限状态马氏链 X，证明 (1) X 没有状态零常返，(2) 若 X 不可约，那么 X 是正常返的。

证明：

假设状态 i 零常返，则 $f_{ii}=1, m_{ii}=+\infty$，又由于 $m_{ii}=f_{ii}+\sum_{j\neq i}p_{ij}f_{ji}$。根据性质 3.2.19，因为 i 常返且 $i\to j$，所以 $f_{ji}=1$，从而 $+\infty=1+\sum_{j\neq i}p_{ij}$，而 $\sum_{j\neq i}p_{ij}$ 为有限个有限的数求和，所以不可能为 $+\infty$，产生矛盾，所以状态 i 不是零常返，即 X 没有状态零常返。

若 X 不可约，则 X 是本质类，又因为 X 的状态有限，所以 X 是常返类；又因为 X 没有状态零常返，所以 X 是正常返的。 □

3. 设 X 是一个不可约非常返的马氏链，令

$$l_j=\sup\{n\geqslant 0, X_n=j, X_k\neq j, k>n\},$$

即 l_j 是 X 最后一次到达状态 j 的时间。假定 X 从 j 出发，求 l_j 的分布和均值。

解：

$$P(l_j=n)=P_j(X_n=j, X_k\neq j, \forall k>n)=p_{jj}^{(n)}\cdot\sum_{k\neq j}e_{jk}$$

$$E(l_j)=\sum_{n=1}^{\infty}nP(l_j=n)=\sum_{n=1}^{\infty}np_{jj}^{(n)}\sum_{k\neq j}e_{jk}$$

□

4. 设 X 的转移概率矩阵为 $\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$，求 X 的平稳分布。

解：

设 $M=(\pi_1,\pi_2,\pi_3)$，P 为转移概率矩阵，则根据 $M=MP$ 以及 $\pi_1+\pi_2+\pi_3=1$ 可以列出方程组如下：

$$\begin{cases}\pi_1=\frac{1}{4}\pi_2\\ \pi_2=\pi_1+\frac{1}{2}\pi_2+\pi_3\\ \pi_3=\frac{1}{4}\pi_2\\ \pi_1+\pi_2+\pi_3=1\end{cases}$$

解得 $(\pi_1,\pi_2,\pi_3)=\left(\frac{1}{6},\frac{2}{3},\frac{1}{6}\right)$，此即为 X 的平稳分布。 □

5. 一个月后小明有两天假期, 他就打算只要假期里有一天的天气晴朗就出去旅行. 为此他查阅了气象资料, 发现每日天气晴朗 (0) 与非晴朗 (1) 之间的变化可以近似用时齐马氏链来刻画, 转移概率矩阵为 $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$。试估计小明能出去旅行的概率。

解：

设这两天假期的天气为 X_0 和 X_1，状态空间为 $S=\{0,1\}$，则小明能出去旅行的概率为

$$\begin{aligned} P(X_0=0)+P(X_0=1,X_1=0) &= P(X_0=0)+P(X_0=1)P(X_1=0|X_0=1) \\ &= P(X_0=0)+P(X_0=1)p_{10} \end{aligned}$$

由于每日天气之间的变化可以近似用时齐马氏链来刻画，且天气是一个稳定的系统，所以可以认为天气的初始分布为平稳分布，即 $P(X_0=0)$ 和 $P(X_0=1)$ 可以使用平稳分布的概率来计算。

设 $M=(\pi_1,\pi_2)$，P 为转移概率矩阵，则根据 $M=MP$ 以及 $\pi_1+\pi_2=1$ 可以列出方程组如下：

$$\begin{cases} \pi_0=\frac{1}{2}\pi_0+\frac{1}{4}\pi_1 \\ \pi_1=\frac{1}{2}\pi_0+\frac{3}{4}\pi_1 \\ \pi_0+\pi_1=1 \end{cases}$$

解得 $(\pi_0,\pi_1)=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$，此即为天气的平稳分布，所以 $P(X_0=0)=\frac{1}{3}, P(X_0=1)=\frac{2}{3}$，所以小明能出去旅行的概率为 $\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$。 □

6. 某人有 M 把伞并在办公室和家之间往返：出门上班时下雨并家里有伞就带把伞去办公室；下班回家时下雨且办公室有伞就带把伞回家。其它时候都不带伞。假设每天上下班时是否下雨是独立同分布的，下雨的概率为 p，不下雨的概率为 $1-p$，问此人出门上班时碰到下雨且没有雨伞的概率。

解：

设 $X=\{X_i : i\in\mathbb{Z}\}$ 表示某天上班之前家里的伞的数量，则显然 X 是时齐马氏链。为了求出转移概率矩阵，可以梳理出下表：

上班	下雨		不下雨	
下班	下雨	不下雨	下雨	不下雨
概率	p^2	$p(1-p)$	$p(1-p)$	$(1-p)^2$
X 的变化	0	-1	$+1$	0

需要注意的是，0 和 M 为 X 的边界，即当 $X=0$ 时不能再减少，当 $X=M$ 时不能再增加，

所以转移概率矩阵为：

$$P=\begin{bmatrix}1-p+p^2 & p(1-p) & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ p(1-p) & p^2+(1-p)^2 & p(1-p) & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & p(1-p) & p^2+(1-p)^2 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p^2+(1-p)^2 & p(1-p) & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p(1-p) & p^2+(1-p)^2 & p(1-p)\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p(1-p) & 1-p+p^2\end{bmatrix}$$

根据 $\begin{bmatrix}\pi_0 & \pi_1 & \cdots & \pi_M\end{bmatrix}P=\begin{bmatrix}\pi_0 & \pi_1 & \cdots & \pi_M\end{bmatrix}$ 以及 $\pi_0+\pi_1+\cdots+\pi_M=1$ 可以解得

$$\pi_0=\pi_1=\cdots=\pi_M=\frac{1}{M+1}$$

（直观上这么复杂的一个系统，竟然处于任何一个状态的概率都是相同的！）

此即为 X 的平稳分布，所以 $P(X=0)=\dfrac{1}{M+1}$。

$$P(\text{此人出门上班时碰到下雨且没有雨伞})=pP(X=0)=\frac{p}{M+1}$$

□

7. 设 X 的状态空间 $S=\mathbb{N}$, 对任意 $n\geqslant 0$, 转移概率 $p_{n,n+1}=p_n$, $p_{n,0}=1-p_n$, 其中 $p_n\in(0,1)$。求

(1) 能保证 0 是常返状态的条件；

解：

只需要考虑 $f_{00}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{00}^{(n)}=1$ 的条件。由于

$$\begin{cases}f_{00}^{(1)}=p_{00}=1-p_0\\ f_{00}^{(2)}=p_{01}p_{10}=p_0(1-p_1)=p_0-p_0p_1\\ f_{00}^{(3)}=p_{01}p_{12}p_{20}=p_0p_1(1-p_2)=p_0p_1-p_0p_1p_2\\ \cdots\end{cases}$$

所以 $\displaystyle\sum_{n=0}^{m}f_{00}^{(n)}=1-\prod_{n=0}^{m-1}p_i$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}f_{00}^{(n)}=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m}f_{00}^{(n)}=\lim_{m\to\infty}\left(1-\prod_{n=0}^{m-1}p_i\right)=1$，所以能保证 0 是常返状态的条件为

$$\prod_{n=0}^{\infty}p_i=0,\quad \text{即 } p_0p_1p_2\cdots=0$$

□

(2) 能保证 0 是正常返状态的条件;

解 :

0 是正常返状态即 $m_{00}<\infty$，所以

$$\begin{cases} m_{00}=1+p_0m_{10}<\infty \implies p_0=0\text{或}m_{10}<\infty \\ m_{10}=1+p_1m_{20}<\infty \implies p_1=0\text{或}m_{20}<\infty \\ m_{20}=1+p_2m_{30}<\infty \implies p_2=0\text{或}m_{30}<\infty \\ \cdots \end{cases}$$

所以能保证 0 是正常返状态的条件为 $\exists n_0\in\mathbb{N}$, s.t. $p_{n_0}=0$。也就是当 $p_0,p_1,p_2,\cdots$ 中首次出现 0 的时候，在这个 0 前面的部分构成有限状态的本质类，从而构成正常返类，从而 0 是正常返状态。 □

(3) 平稳分布。

解 :

转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} 1-p_0 & p_0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1-p_1 & 0 & p_1 & 0 & \cdots \\ 1-p_2 & 0 & 0 & p_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

根据 $\begin{bmatrix}\pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \cdots\end{bmatrix}P=\begin{bmatrix}\pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \cdots\end{bmatrix}$ 以及 $\pi_0+\pi_1+\pi_2+\cdots=1$ 可以解得

$$\begin{cases} \pi_0=\frac{1}{1+p_0+p_0p_1+p_0p_1p_2+\cdots} \\ \pi_1=\frac{p_0}{1+p_0+p_0p_1+p_0p_1p_2+\cdots} \\ \pi_2=\frac{p_0p_1}{1+p_0+p_0p_1+p_0p_1p_2+\cdots} \\ \cdots \end{cases}$$

即 $\forall i\in\mathbb{N}$, $\pi_i=\dfrac{\prod_{j=1}^{i}p_i}{\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{n}p_i}$，此即为 X 的平稳分布。 □

8. 设 X 的转移概率满足: 对任意 $i,j\in S=\mathbb{N}, p_{i,i}=\lambda_i+(1-\lambda_i)u_i$; 而 $i\neq j$ 时, $p_{i,j}=(1-\lambda_i)u_j$, 其中 $u_j>0$, $\sum\limits_{j=0}^{\infty}u_j=1, 0<\lambda_i<1$。证明

(1) X 是常返的;

证明 :

首先写出转移概率矩阵：

$$P=\begin{bmatrix}\lambda_0+(1-\lambda_0)u_0 & (1-\lambda_0)u_1 & (1-\lambda_0)u_2 & \cdots\\ (1-\lambda_1)u_0 & \lambda_1+(1-\lambda_1)u_1 & (1-\lambda_1)u_2 & \cdots\\ (1-\lambda_2)u_0 & (1-\lambda_2)u_1 & \lambda_2+(1-\lambda_2)u_2 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\end{bmatrix}$$

观察后可以发现

$$P=\begin{bmatrix}1-\lambda_0\\ 1-\lambda_1\\ 1-\lambda_2\\ \vdots\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_0 & u_1 & u_2 & \cdots\end{bmatrix}+\mathrm{diag}(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\cdots)$$

所以 $\forall i\in\mathbb{N},p_{ii}^{(n)}=P^n(i,i)$，计算后可以发现 $n\to\infty$ 时，$p_{ii}^{(n)}$ 不以 0 为极限，所以 i 常返，从而 X 是常返的。 □

(2) X 是正常返当且仅当 $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}\frac{u_i}{1-\lambda_i}<\infty$。

证明：

$\forall i\in\mathbb{N}$，由于 X 常返，所以 $f_{ii}=1$，从而有

$$\begin{aligned}X_i\text{正常返} &\iff m_{ii}=f_{ii}+\sum_{j\neq i}p_{ij}m_{ji}=1+\sum_{j\neq i}(1-\lambda_i)u_jm_{ji}<\infty\\ &\iff \forall j\in\mathbb{N},(1-\lambda_i)u_j<\infty\end{aligned}$$

对 i 求和可知上式 $\iff \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}\frac{u_i}{1-\lambda_i}<\infty$，因此 X 是正常返当且仅当 $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}\frac{u_i}{1-\lambda_i}<\infty$。 □

10. 设不可约正常返马氏链 X 的转移概率矩阵为 $(p_{i,j})_{i,j\in S}$，$\pi=(\pi_i,i\in S)$ 为平稳分布。令 $Y_n=(X_n,X_{n+1})$。证明 $Y=\{Y_n\ ;\ n\geqslant 0\}$ 是状态空间为 $\mathcal{M}=\{(i,j)\ ;\ i,j\in S,p_{i,j}>0\}$ 的不可约正常返马氏链，平稳分布为 $(\pi_ip_{i,j},(i,j)\in\mathcal{M})$。

证明：

因为 X 是不可约正常返马氏链，所以 $\forall i,j,k,l\in S$且满足$p_{ij}>0,p_{kl}>0$(即 $\forall(i,j),(k,l)\in\mathcal{M}$)，$\exists n_0\in\mathbb{N}$，s.t. $p_{ik}^{(n_0)}>0$，从而

$$p_{(i,j)(k,l)}^{(n_0)}=p_{ik}^{(n_0)}p_{kl}>0$$

即 Y 的任意两个状态都可互通，所以 Y 是不可约的。

因为 X 是正常返的，所以对于 $\forall(i,j)\in\mathcal{M}$，$\sum_{n=1}^{\infty}p_{ii}^{(n)}<\infty$，所以

$$p_{(i,j)(i,j)}^{(n)}=p_{ii}^{(n)}p_{ij}\implies\sum_{n=1}^{\infty}p_{(i,j)(i,j)}^{(n)}=\sum_{n=1}^{\infty}p_{ii}^{(n)}p_{ij}<\infty$$

所以 Y 是正常返的。

因为 $\pi=(\pi_i, i\in S)$ 为 X 的平稳分布，所以对于 $\forall (i,j),(j,k)\in\mathcal{M}$，$\pi_i p_{ij}=\pi_j$，所以

$$\pi_i p_{ij} p_{(i,j)(j,k)} = \pi_i p_{ij} p_{jk} = \pi_j p_{jk}$$

所以 $(\pi_i p_{ij}, (i,j)\in\mathcal{M})$ 为 Y 的平稳分布。 $\square$