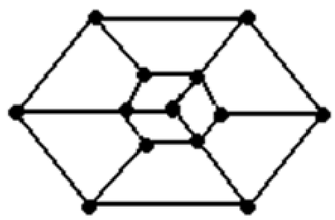
8.2 哈密顿图

1. 说明下图不是哈密顿图。



由于在此图中找不到哈密顿回路，所以此图不是哈密顿图。

2. * 证明任意竞赛图都有有向哈密顿通路。

不会。

3. 为了测试计算机网络上的所有连接和设备，可以在网络上发一个诊断消息。为了测试所有的连接，应当使用什么种类的通路？为了测试所有的设备呢？

为了测试所有的连接，应当使用欧拉通路；为了测试所有的设备，应当使用哈密顿通路。

8.3 平面图

1. 设简单连通图 G 有 n 个顶点、e 条边。若 G 是平面图，请证明：$e \leqslant 3n-6$。

证明：

因为 G 是简单图，所以其面的次数都不小于 3，根据欧拉公式的推论，有

$$e \leqslant \frac{3}{3-2} \times (n-2) = 3n-6$$

□

2. 若简单连通图 G 有 n 个顶点、e 条边，则 G 的厚度至少为 $\lceil e/(3n-6) \rceil$。(简单图 G 的厚度是指 G 的平面子图的最小个数，这些子图的并是 G。)

证明：

设 G 的厚度为 m,则可以将 G 看做 m 个平面子图的并,将这些平面子图设为 $G_1, G_2, \ldots G_m$，则 $G = \bigcup_{i=1}^{m} G_i$。对 $\forall i = 1, 2, \ldots, m$，设 G_i 的顶点数为 n_i，边数为 e_i。则根据第 1 题，有 $0 < e_i \leqslant 3n_i - 6$，所以

$$\forall i = 1, 2, \ldots, m, \quad e_i \leqslant 3n_i - 6 \leqslant 3n - 6$$

对不等式进行求和可得

$$e \leqslant \sum_{i=1}^{m} e_i \leqslant \sum_{i=1}^{m} (3n-6) = m(3n-6)$$

所以有

$$m \geqslant \frac{e}{3n-6}$$

注意到 G 的厚度 m 为整数，所以 G 的厚度至少为 $\lceil e/(3n-6) \rceil$。

□