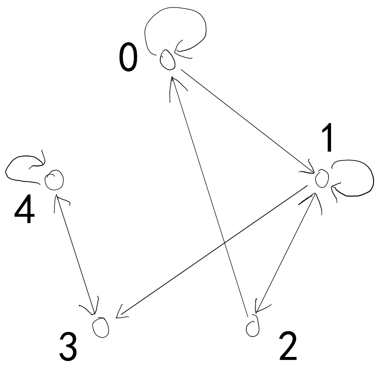
《随机过程》4 月 8 日作业

1. 设马氏链 X 的状态空间为 $S=\{0,1,2,3,4\}$，一步转移概率矩阵为

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

试写出状态空间 S 中的所有互通类，判断它们是否是本质类，并说明理由。

解：



首先画出示意图，之后即可看出互通类为

$$\{0,1,2\},\{3,4\}$$

其中由于 $1\to 3$ 而 $3\not\to 1$，所以 $\{0,1,2\}$ 不是本质类。

而 $3\to 4$ 且 $4\to 3$，所以 $\{3,4\}$ 是本质类。

□

2. 在马氏链中，假设 $i\leftrightarrow j$ 且它们的周期为 d。证明：若 $p_{ij}^{(n)}>0$ 且 $p_{ij}^{(m)}>0$，则必有 $d|(n-m)$。

证明：

由于 $i\leftrightarrow j$，则可设 $p_{ji}^{(x)}>0$，所以

$$p_{ii}^{(n+x)}\geqslant p_{ij}^{(n)}p_{ji}^{(x)}>0,\quad p_{ii}^{(m+x)}\geqslant p_{ij}^{(m)}p_{ji}^{(x)}>0$$

又由于 i 的周期为 d，所以 $d|(n+x), d|(m+x)$，则根据整除的性质，有 $d|(n-m)$。 □

3. 证明：在马氏链中，若状态 j 非常返，则对任意状态 i，有 $\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=0$。

证明：

设状态空间为 S。因为状态 j 非常返，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_{ii}^{(n)}<\infty$。

若 $j \to i$，则 $\exists m > 0$, s.t. $p_{ji}^{(m)} > 0$，所以

$$\infty > \sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} \geqslant \sum_{n=m}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \sum_{n=m}^{\infty} \sum_{k \in S}^{n} p_{jk}^{(m)} p_{kj}^{(n-m)} \geqslant \sum_{n=m}^{\infty} p_{ji}^{(m)} p_{ij}^{(n-m)} = p_{ji}^{(m)} \sum_{n=m}^{\infty} p_{ij}^{(n-m)}$$

因为 $p_{ji}^{(m)} > 0$，所以上式可化为 $\sum\limits_{n=m}^{\infty} p_{ij}^{(n-m)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} < \infty$。从而级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)}$ 收敛 $\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$

若 $j \not\to i$，则不会了。 □

4. 证明：在马氏链中，若状态 j 为吸收态，则对任意状态 i，有 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = f_{ij}$。

证明：

由于 j 为吸收态，所以 $\forall i = 1, 2, \cdots, n$, $p_{jj}^{(i)} = 1$，所以

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} p_{jj}^{(n-k)} f_{ij}^{(k)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}^{(k)} = f_{ij}$$

□

5. 证明：元素有限的本质类必是常返类。

证明：

设本质类 $S = \{s_1, s_2, \cdots, s_n\}$，则对于 $\forall i = 1, 2, \cdots, n$，令 $S_i = \{s_j : p_{s_i s_j}^{(1)} > 0\}$（即把所有 s_i 一步可达的 s_j 都取出来组成 S_i）。由于 S 是本质类，所以当 $s_i \to s_j$ 时有 $s_j \to s_i$，设 $s_j \to s_i$ 的首次到达需要的步数为 m_j 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{s_i s_i}^{(n)} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s_j \in S_i} p_{s_i s_j}^{(1)} p_{s_j s_i}^{(m_j)}$$

由于 $\sum\limits_{s_j \in S_i} p_{s_i s_j}^{(1)} p_{s_j s_i}^{(m_j)}$ 有限且为定值，可以设为 ε ($\varepsilon > 0$)，则

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{s_i s_i}^{(n)} \geqslant \lim_{n\to\infty} n\varepsilon = \infty$$

所以 S 是常返类。 □

6. 证明：平面格点上的简单对称随机游动（指每一步向四个方向挪动的概率都是 $\frac{1}{4}$，且各步独立）常返。

证明：

设 $\uparrow,\downarrow,\leftarrow,\rightarrow$ 分别表示向上下左右挪动一步，对于任意状态 i（即任意一个格点），

$$\begin{aligned} p_{ii}^{(4n+2)} &= p_{\uparrow}^{(1)}p_{\downarrow}^{(4n+1)} + p_{\rightarrow}^{(1)}p_{\leftarrow}^{(4n+1)} + p_{\downarrow}^{(1)}p_{\uparrow}^{(4n+1)} + p_{\leftarrow}^{(1)}p_{\rightarrow}^{(4n+1)} \\ &= \frac{1}{4}p_{\downarrow}^{(4n+1)} + \frac{1}{4}p_{\leftarrow}^{(4n+1)} + \frac{1}{4}p_{\uparrow}^{(4n+1)} + \frac{1}{4}p_{\rightarrow}^{(4n+1)} \end{aligned}$$

对于 $p_{\downarrow}^{(4n+1)}$，可以理解为向下挪动了 $n+1$ 步，向其它三个方向挪动了 n 步，所以 $p_{\downarrow}^{(4n+1)} = \mathrm{C}_{4n+1}^{n}\mathrm{C}_{3n+1}^{n}\mathrm{C}_{2n+1}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^{4n+1}$。$p_{\leftarrow}^{(4n+1)},p_{\uparrow}^{(4n+1)},p_{\rightarrow}^{(4n+1)}$ 同理。因此

$$\text{上式} = \frac{1}{4}\times 4\left(\mathrm{C}_{4n+1}^{n}\mathrm{C}_{3n+1}^{n}\mathrm{C}_{2n+1}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^{4n+1}\right)$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}p_{ii}^{(n)} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty}p_{ii}^{(4n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{C}_{4n+1}^{n}\mathrm{C}_{3n+1}^{n}\mathrm{C}_{2n+1}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^{4n+1} = \infty$$

所以状态 i 常返，从而任意一个格点均常返。 □

7. 设 $X=\{X_n\ :\ n\in\mathbb{N}\}$ 是不可约常返马氏链。对 $j\in S$，定义 $\tau_j^{(0)}=0$，并对 $k\in\mathbb{Z}^+$ 递归定义 $\tau_j^{(k)}=\inf\left\{n>\tau_j^{(k-1)}\ :\ X_n=j\right\}$。然后对 $k\in\mathbb{Z}^+$ 定义 $W_j^{(k)}=\tau_j^{(k)}-\tau_j^{(k-1)}$。证明：$\left\{W_j^{(k)}\ :\ k\in\mathbb{Z}^+\right\}$ 相互独立，且当 $k\geqslant 2$ 时分布相同。

证明：

设初始状态为 i，对于 $\forall k\geqslant 2$，

$$\begin{aligned} P\left(W_j^{(k)}=y\right) &= P\left(\tau_j^{(k)}-\tau_j^{(k-1)}=y\right) \\ &= \sum_{x=0}^{\infty}P\left(\tau_j^{(k)}=x+y,\tau_j^{(k-1)}=x\right) \\ &= \sum_{x=0}^{\infty}P\left(\tau_j^{(k)}=x+y\middle|\tau_j^{(k-1)}=x\right)P\left(\tau_j^{(k-1)}=x\right) \\ &= \sum_{x=0}^{\infty}f_{jj}^{(y)}\sum_{x_1+x_2+\cdots+x_{k-1}=x}f_{ij}^{(x_1)}f_{jj}^{(x_2)}\cdots f_{jj}^{(x_{k-1})} \\ &= \sum_{x=0}^{\infty}\sum_{x_1+x_2+\cdots+x_{k-1}=x}f_{ij}^{(x_1)}f_{jj}^{(x_2)}\cdots f_{jj}^{(x_{k-1})}f_{jj}^{(y)} \end{aligned}$$

后面不会了。 □

8. 证明：在马氏链中，对任意 $i,j,k\in S$，有 $f_{ik}\geqslant f_{ij}f_{jk}$。

证明：

对任意 $i,j,k\in S$，

$$f_{ik}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{ik}^{(n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{a\in S}\sum_{b=1}^{n}p_{ia}^{(b)}f_{ak}^{(n-b)}$$

$$f_{ij}f_{jk}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}f_{ij}^{(n)}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}f_{jk}^{(n)}\right)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{a\in S}\sum_{b=1}^{n}p_{ia}^{(b)}f_{aj}^{(n-b)}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{a\in S}\sum_{b=1}^{n}f_{ja}^{(b)}f_{ak}^{(n-b)}\right)$$

实在是不会了。 □