

## 第四章 一阶逻辑

### 4.1 谓词、量词和谓词公式

1. 用谓词公式表达语句“所有的运动员都钦佩某些教练”，个体域为全总个体域。

解：

由于个体域为全总个体域，

设 $P(x)$ 表示 $x$ 为运动员， $Q(x)$ 表示 $x$ 为教练， $R(x, y)$ 表示 $x$ 钦佩 $y$ ，

注意到“某些”表示复数，则语句“所有的运动员都钦佩某些教练”可表示为：

$$\forall x(P(x) \rightarrow \exists y \exists z((y \neq z) \wedge Q(y) \wedge Q(z) \wedge R(x, y) \wedge R(x, z)))$$

□

2. 用谓词公式表达语句“本班的学生都已学过微积分”，个体域分别取 ECNU 的学生集合和本班的学生集合。

解：

当个体域取 ECNU 的学生集合时，

设 $P(x)$ 表示 $x$ 为本班的学生， $Q(x)$ 表示 $x$ 已学过微积分，

则语句“本班的学生都已学过微积分”可表示为：

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$$

当个体域取本班的学生集合时，

设 $Q(x)$ 表示 $x$ 已学过微积分，

则语句“本班的学生都已学过微积分”可表示为：

$$\forall xQ(x)$$

□

3. 用谓词公式表达语句“班上无人恰给另外两个同班同学发过电子邮件”，个体域取本班学生的集合。

解：

由于个体域为本班学生的集合，

设 $P(x, y)$ 表示 $x$ 给 $y$ 发过电子邮件，

则语句“班上无人恰给另外两个同班同学发过电子邮件”可表示为：

$$\neg \exists x(\exists y \exists z((y \neq z) \wedge P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge \forall w((w \neq y) \wedge (w \neq z) \rightarrow \neg P(x, w))))$$

□

4. 将  $\forall x(C(x) \vee \exists y(C(y) \wedge F(x, y)))$  翻译成汉语, 其中  $C(x)$  表示  $x$  有电脑,  $F(x, y)$  表示  $x$  和  $y$  是同班同学, 个体域是学校全体学生的集合。

解 :

对于学校中的任何一个学生, 他有电脑, 或者存在一个他的同班同学有电脑。

□

5. 给定解释  $I$  如下:

个体域  $D : \{-2, 3, 6\}$ ;

个体常元  $a : 6$ ;

谓词  $P : 2 > 1, Q(x) : x \leq 3, R(x) : x > 5$ 。

求出谓词公式  $\forall x(P \rightarrow Q(x)) \vee R(a)$  在解释  $I$  下的真值。

解 :

$\forall x(P \rightarrow Q(x)) \vee R(a)$  在解释  $I$  下的真值为:

$$\begin{aligned} & ((P \rightarrow Q(-2)) \wedge (P \rightarrow Q(3)) \wedge (P \rightarrow Q(6))) \vee R(6) \\ & = (((2 > 1) \rightarrow (-2 \leq 3)) \wedge ((2 > 1) \rightarrow (3 \leq 3)) \wedge ((2 > 1) \rightarrow (6 \leq 3))) \vee (6 > 5) \\ & = ((1 \rightarrow 1) \wedge (1 \rightarrow 1) \wedge (1 \rightarrow 0)) \vee 1 \\ & = (1 \wedge 1 \wedge 0) \vee 1 \\ & = 0 \vee 1 \\ & = 1 \end{aligned}$$

□

书上 3. 请将下列谓词公式翻译为汉语, 并指出每个命题的真值, 这里个体域为实数集。

(1)  $\forall x(x^2 = x)$ ;

对于任何一个实数  $x$ , 都有  $x^2 = x$

真值为 0

(2)  $\exists x(2x = x)$ ;

存在一个实数  $x$ , 满足  $2x = x$

真值为 1

(3)  $\exists x(x^2 + 3x - 2 = x)$ ;

存在一个实数  $x$ , 使得  $x^2 + 3x - 2 = x$

真值为 1

(4)  $\forall x(x - 3 < x)$ ;

对于任意一个实数  $x$ , 都有  $x - 3 < x$

真值为 1