

第一章 集合论基础

1.1 集合的概念和术语

1. 给出集合 $\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ 的谓词表示法。

$$\{x|x \in \mathbb{Z}, -3 \leq x \leq 3\}$$

2. 判断 2 和 $\{2\}$ 是否下列集合的元素。

(1) $\{x|x \text{ 是大于 } 1 \text{ 的整数}\}$

2 是, $\{2\}$ 不是。

(2) $\{x|x \text{ 是某整数的平方}\}$

2 不是, $\{2\}$ 不是。

(3) $\{2, \{2\}\}$

2 是, $\{2\}$ 是。

(4) $\{\{2\}, \{\{2\}\}\}$

2 不是, $\{2\}$ 是。

(5) $\{\{2\}, \{2, \{2\}\}\}$

2 不是, $\{2\}$ 是。

(6) $\{\{\{2\}\}\}$

2 不是, $\{2\}$ 不是。

3. 下列哪些命题成立? 哪些不成立? 为什么?

(1) $\emptyset \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

成立。

(2) $\emptyset \subseteq \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

成立。

(3) $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

成立。

(4) $\{\{\emptyset\}\} \subseteq \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

成立。

1.2 集合的运算

1. 设 A 是 ECNU 二年级学生的集合, B 是 ECNU 必须学习离散数学的学生的集合。请用 A 和 B 表示 ECNU 不必学习离散数学的二年级的学生的集合。

$$A \setminus B$$

2. 设 A 是集合, 下列命题是否必定成立?

(1) $A \in P(A)$

是。

(2) $A \subseteq P(A)$

否。

(3) $\{A\} \in P(A)$

否。

(4) $\{A\} \subseteq P(A)$

是。

3. 设 A 和 B 是任意集合, 证明 $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$ 。

证明 :

证明:

$$X \in P(A) \cap P(B)$$

$$\Leftrightarrow X \in P(A) \text{ 且 } X \in P(B)$$

$$\Leftrightarrow X \subseteq A, X \subseteq B$$

$$\Leftrightarrow X \subseteq A \cap B$$

$$\Leftrightarrow X \in P(A \cap B)$$

$$\therefore P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$$

□

4. 设 A 是任意集合, $A^3 = (A \times A) \times A = A \times (A \times A)$ 是否成立? 为什么?

不一定, 假设 $A = \{1\}$, 则 $A^3 = \{(1, 1, 1)\}$, $(A \times A) \times A = \{(1, 1), 1\}$, $A \times (A \times A) = \{(1, (1, 1))\}$

5. 设 A, B, C 和 D 是集合, 证明: 若 A, B, C 和 D 均非空集, 且 $A \times B = C \times D$, 那么 $A = C$ 且 $B = D$ 。

证明：

假设 $A \neq C$ 或 $B \neq D$
 则 $\exists x, x \in A, x \notin C$ 或 $x \in C, x \notin A$
 或 $\exists y, y \in B, y \notin D$ 或 $y \in D, y \notin B$
 不妨设 $\exists x, x \in A, x \notin C$
 $\therefore B$ 非空
 \therefore 设 $b \in B$
 则 $(x, b) \in A \times B$
 $\therefore x \notin C$
 $\therefore (x, b) \notin C \times D$
 $\therefore A \times B \neq C \times D$
 与已知矛盾
 \therefore 若 A, B, C 和 D 均非空集, 且 $A \times B = C \times D$,
 那么 $A = C$ 且 $B = D$ 。

□

6. * 编写一个程序, 输入任意一个自然数 n , 输出 $P(1, 2, \dots, n)$ 的所有元素。
 (JavaScript, Nodejs 环境)

```
const readline = require("readline");
const rl = readline.createInterface({
  input: process.stdin,
  output: process.stdout,
});

let n;

function get_pow_set(end_num) {
  end_num = parseInt(end_num);
  let pow_set = [[]];
  for (let i = 1; i <= end_num; i++) {
    pow_set = pow_set.concat(pow_set.map((ele) => {
      return ele.concat([i]);
    }));
  }
  return pow_set;
}

rl.question("", (answer) => {
  n = parseInt(answer);
  console.log(get_pow_set(n));
});
```

```
        rl.close();  
    });
```