6.4 最小方差无偏估计

11. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_m \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(a, \sigma^2), y_1, y_2, \cdots y_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(a, 2\sigma^2)$，求 a 和 σ^2 的 UMVUE。

解：

根据贝叶斯估计的方法，$\widehat{a}$ 和 $\widehat{\sigma^2}$ 应为两个信息源的加权平均，权重为方差的倒数，即

$$\widehat{a} = \frac{\frac{1}{m\sigma^2}}{\frac{1}{m\sigma^2} + \frac{1}{2n\sigma^2}} \bar{x} + \frac{\frac{1}{2n\sigma^2}}{\frac{1}{m\sigma^2} + \frac{1}{2n\sigma^2}} \bar{y} = \frac{2\bar{x}n + \bar{y}m}{m + 2n}$$

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{\frac{1}{m\sigma^2}}{\frac{1}{m\sigma^2} + \frac{1}{2n\sigma^2}} s_x^2 + \frac{\frac{1}{2n\sigma^2}}{\frac{1}{m\sigma^2} + \frac{1}{2n\sigma^2}} s_y^2 = \frac{ms_y^2 + 2ns_x^2}{m + 2n}$$

对 0 的任一无偏估计 $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_m, y_1, y_2, \cdots, y_n)$，$\mathrm{Cov}(\widehat{a}, \varphi) = 0, \mathrm{Cov}(\widehat{\sigma^2}, \varphi) = 0$，所以 $\widehat{a}$ 和 $\widehat{\sigma^2}$ 是 UMVUE。 □

12. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(\mu, 1)$，求 μ^2 的 UMVUE。证明此 UMVUE，达不到 C-R 不等式的下界，即它不是有效估计。

证明：

直观上来看，μ^2 的 UMVUE 应该是 $\bar{x}^2$。接下来计算 C-R 不等式的下界，由于 $I(\mu) = 1$，所以 C-R 不等式的下界为

$$\frac{[g'(\mu)]^2}{nI(\mu)} = \frac{(2\mu)^2}{n} = \frac{4\mu^2}{n}$$

由于 $\bar{x} \sim N(\mu, \frac{1}{n})$，所以 $(n(\bar{x} - \mu)) \sim \chi^2(1)$

$$\mathrm{Var}\, \bar{x}^2 = E\bar{x}^4 - (E\bar{x}^2)^2 = \text{实在是不会算了} > \frac{4\mu^2}{n}$$

所以此 UMVUE 达不到 C-R 不等式的下界，即它不是有效估计。 □

14. 设 $x_1, x_2, \cdots x_n$ 为独立同分布变量，$0 < \theta < 1$，

$$P(x_1 = -1) = \frac{1-\theta}{2}, \quad P(x_1 = 0) = \frac{1}{2}, \quad P(x_1 = 1) = \frac{\theta}{2}$$

(1) 求 θ 的 MLE $\widehat{\theta}_1$ 并问 $\widehat{\theta}_1$ 是否是无偏的；

解：

设在 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中有 n_{-1} 个 -1，n_0 个 0，n_1 个 1，则对数极大似然函数为

$$\begin{aligned}\ln L(n_{-1}, n_0, n_1; \theta) &= \ln\left[\left(\frac{1-\theta}{2}\right)^{n_{-1}} \left(\frac{1}{2}\right)^{n_0} \left(\frac{\theta}{2}\right)^{n_1}\right] \\ &= n_{-1} \ln\left(\frac{1-\theta}{2}\right) + n_0 \ln\frac{1}{2} + n_1 \ln\frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

对 θ 求偏导并令其为 0

$$\frac{\partial L}{\partial \theta}=-\frac{1}{2}\frac{2n_{-1}}{1-\theta}+\frac{1}{2}\frac{2n_1}{\theta}=\frac{n_1}{\theta}-\frac{n_{-1}}{1-\theta}=0$$

则最大似然估计为

$$\widehat{\theta}_1=\frac{n_1}{n_1+n_{-1}}$$

根据重期望公式，

$$E\widehat{\theta}_1=E\left(E\left(\frac{n_1}{n_1+n_{-1}}\middle|n_1+n_{-1}\right)\right)$$

其中

$$E\left(\frac{n_1}{n_1+n_{-1}}\middle|n_1+n_{-1}\right)=E\left(\frac{n_1}{m}\middle|n_1+n_{-1}=m\right)=\frac{1}{m}\times m\frac{\frac{\theta}{2}}{\frac{1-\theta}{2}+\frac{\theta}{2}}=\theta$$

所以 $E\widehat{\theta}_1=E(\theta)=\theta$，即 $\widehat{\theta}_1$ 是无偏估计。 □

(2) 求 θ 的矩估计 $\widehat{\theta}_2$；

解：

设总体为 X，则

$$EX=-1\times\frac{1-\theta}{2}+0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{\theta}{2}=\theta-\frac{1}{2}$$

所以矩估计 $\widehat{\theta}_2=\bar{x}+\frac{1}{2}$。 □

(3) 计算 θ 的无偏估计的方差的 C-R 下界。

解：

$$p(x;\theta)=\begin{cases}\frac{1-\theta}{2}, & x=-1\\ \frac{1}{2}, & x=0\\ \frac{\theta}{2}, & x=1\\ 0, & 其他\end{cases},\quad \ln p(x;\theta)=\begin{cases}\ln(1-\theta)-\ln 2, & x=-1\\ -\ln 2, & x=0\\ \ln\theta-\ln 2, & x=1\\ 0, & 其他\end{cases},$$

$$\frac{\partial \ln p(x;\theta)}{\partial\theta}=\begin{cases}-\frac{1}{1-\theta}, & x=-1\\ 0, & x=0\\ \frac{1}{\theta}, & x=1\\ 0, & 其他\end{cases},\quad \left(\frac{\partial \ln p(x;\theta)}{\partial\theta}\right)^2=\begin{cases}\frac{1}{(1-\theta)^2}, & x=-1\\ \frac{1}{\theta^2}, & x=1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

所以

$$I(\theta)=E\left(\frac{\partial \ln p(x;\theta)}{\partial\theta}\right)^2=\frac{1}{(1-\theta)^2}\times\frac{1-\theta}{2}+\frac{1}{\theta^2}\times\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2\theta(1-\theta)}$$

所以 θ 的无偏估计的方差的 C-R 下界为

$$\frac{1}{nI(\theta)}=\frac{2\theta(1-\theta)}{n}$$

□

6.5　贝叶斯估计

2. 设总体为均匀分布 $U(\theta,\theta+1)$，θ 的先验分布是 $U(10,16)$。现有三个观测值：$11.7, 12.1, 12.0$。求 θ 的后验分布。

解：

$$p(X|\theta)=\begin{cases}1^3, & \theta\in[11.1,11.7]\\ 0, & \theta\notin[11.1,11.7]\end{cases}=1_{[11.1,11.7]}(\theta),\quad \pi(\theta)=\frac{1}{6}1_{[10,16]}(\theta)$$

所以 $h(X,\theta)=p(X|\theta)\pi(\theta)=\frac{1}{6}1_{[11.1,11.7]}(\theta)$，　$m(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{6}1_{[11.1,11.7]}(\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{1}{6}\times 0.7$。所以 θ 的后验分布为

$$\pi(\theta|X)=\frac{h(X,\theta)}{m(X)}=\frac{1}{0.7}1_{[11.1,11.7]}(\theta)=\frac{10}{7}1_{[11.1,11.7]}(\theta)$$

□

3. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是来自几何分布的样本，总体分布列为

$$P(X=k|\theta)=\theta(1-\theta)^k,\quad k=0,1,2,\cdots,$$

θ 的先验分布是均匀分布 $U(0,1)$。

(1) 求 θ 的后验分布；

解：

$$p(\theta|x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{p(x_1,x_2,\cdots,x_n|\theta)\pi(\theta)}{\int_0^1 p(x_1,x_2,\cdots,x_n|\theta)\pi(\theta)\mathrm{d}\theta}=\frac{\prod_{i=1}^n\left[\theta(1-\theta)^{x_i}\right]1_{[0,1]}(\theta)}{\int_0^1\prod_{i=1}^n\left[\theta(1-\theta)^{x_i}\right]\mathrm{d}\theta}$$

□

(2) 若 4 次观测值为 $4,3,1,6$，求 θ 的贝叶斯估计。

解：

$$E(\theta|4,3,1,6)=\int_0^1\theta p(\theta|4,3,1,6)\mathrm{d}\theta=\text{实在算不出来了}$$

□

5. 验证：正态总体方差（均值已知）的共轭先验分布是倒伽马分布（称 X 服从倒伽马分布，如果 $\frac{1}{X}$ 服从倒伽马分布。

证明：

设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，且 $\sigma^2 \sim \mathrm{IG}(\alpha, \gamma)$，则 $\frac{1}{\sigma^2} \sim \mathrm{Ga}(\alpha, \lambda)$，所以

$$h(X|\sigma^2) = p(X|\sigma^2)p(\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \cdot \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{\alpha-1} e^{-\frac{1}{\sigma^2}}$$

$$p(\sigma^2|X) = \frac{p(X|\sigma^2)p(\sigma^2)}{\int_0^{+\infty} p(X|\sigma^2)p(\sigma^2)\mathrm{d}\sigma^2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \cdot \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{\alpha-1} e^{-\frac{1}{\sigma^2}}}{\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \cdot \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{\alpha-1} e^{-\frac{1}{\sigma^2}}\mathrm{d}\sigma^2}$$

计算可得 $p(\sigma^2|X)$ 也是倒伽马分布的概率密度函数，因此 σ^2 的后验分布也是倒伽马分布，从而正态总体方差（均值已知）的共轭先验分布是倒伽马分布。 □

6. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是来自如下总体的一个样本

$$p(x|\theta) = \frac{2x}{\theta^2}, \quad 0 < x < \theta$$

(1) 若 θ 的先验分布为均匀分布 $U(0,1)$，求 θ 的后验分布；

解：

$$\begin{aligned} h(x_1, x_2, \cdots, x_n, \theta) &= P(x_1, x_2, \cdots, x_n|\theta)\pi(\theta) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \frac{2x_i}{\theta^2} 1_{[0,\theta]}(x_i) 1_{[0,1]}(\theta) = 1_{0<x_{(1)}} 1_{x_{(n)}<\theta} \frac{1}{\theta^{2n}} \prod_{i=1}^{n} 2x_i 1_{[0,1]}(\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m(x_1, x_2, \cdots x_n) &= \int_0^1 h(x_1, x_2, \cdots, x_n, \theta)\mathrm{d}\theta = 1_{0<x_{(1)}} \prod_{i=1}^{n} 2x_i \int_0^1 1_{x_{(n)}<\theta} \frac{1}{\theta^{2n}}\mathrm{d}\theta \\ &= 1_{0<x_{(1)}} \prod_{i=1}^{n} 2x_i \int_{x_{(n)}}^1 \frac{1}{\theta^{2n}}\mathrm{d}x = 1_{0<x_{(1)}} \left(-2n+1-(-2n+1)x_{(n)}^{-2n+1}\right) \prod_{i=1}^{n} 2x_i \end{aligned}$$

所以 θ 的后验分布为

$$\pi(\theta|x_1, \cdots, x_n) = \frac{h(x_1, \cdots, x_n, \theta)}{m(x_1, \cdots, x_n)} = \frac{1_{x_{(n)}<\theta} 1_{[0,1]}(\theta)}{\theta^{2n}\left(-2n+1-(-2n+1)x_{(n)}^{-2n+1}\right)}$$

□

(2) 若 θ 的先验分布为 $\pi(\theta) = 3\theta^2, 0 < \theta < 1$，求 θ 的后验分布。

解：

$$\begin{aligned} h(x_1, x_2, \cdots, x_n, \theta) &= P(x_1, x_2, \cdots, x_n|\theta)\pi(\theta) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \frac{2x_i}{\theta^2} 1_{[0,\theta]}(x_i) 3\theta^2 1_{[0,1]}(\theta) = 1_{0<x_{(1)}} 1_{x_{(n)}<\theta} \frac{3\theta^2}{\theta^{2n}} \left(\prod_{i=1}^{n} 2x_i\right) 1_{[0,1]}(\theta) \end{aligned}$$

$$m(x_1,x_2,\cdots x_n)=\int_0^1 h(x_1,x_2,\cdots,x_n,\theta)\mathrm{d}\theta=1_{0<x_{(1)}}\prod_{i=1}^n 2x_i\int_0^1 1_{x_{(n)}<\theta}\frac{3\theta^2}{\theta^{2n}}\mathrm{d}\theta$$

$$=1_{0<x_{(1)}}\prod_{i=1}^n 2x_i\int_{x_{(n)}}^1\frac{3\theta^2}{\theta^{2n}}\mathrm{d}x=1_{0<x_{(1)}}\left(9-6n-(9-6n)x_{(n)}^{3-2n}\right)\prod_{i=1}^n 2x_i$$

所以 θ 的后验分布为

$$\pi(\theta|x_1,\cdots,x_n)=\frac{h(x_1,\cdots,x_n,\theta)}{m(x_1,\cdots,x_n)}=\frac{1_{x_{(n)}<\theta}1_{[0,1]}(\theta)}{\theta^{2n}\left(9-6n-(9-6n)x_{(n)}^{3-2n}\right)}$$

□

8. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是来自均匀分布 $U(0,\theta)$ 的样本，θ 的先验分布是帕雷托分布，其密度函数为 $\pi(\theta)=\dfrac{\beta\theta_0^\beta}{\theta^{\beta+1}},\theta>\theta_0$，其中 β,θ_0 是两个已知的常数。

(1) 验证：帕雷托分布是 θ 的共轭先验分布；

证明：

令 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，则 $P(X|\theta)=\prod_{i=1}^n\frac{1}{\theta}1_{[0,\theta]}(x_i)=\frac{1}{\theta^n}1_{x_{(1)}\geqslant 0}1_{x_{(n)}\leqslant\theta}$

$$h(X,\theta)=P(X|\theta)\pi(\theta)=\frac{\beta\theta_0^\beta}{\theta^{\beta+1+n}}1_{x_{(1)}\geqslant 0}1_{x_{(n)}\leqslant\theta}$$

$$m(X)=\int_{x_{(n)}}^{+\infty}h(X,\theta)\mathrm{d}\theta=\beta\theta_0^\beta 1_{x_{(1)}\geqslant 0}\int_{x_{(n)}}^{+\infty}\theta^{-\beta-1-n}\mathrm{d}\theta=\frac{\beta\theta_0^\beta 1_{x_{(1)}\geqslant 0}}{\beta+n}x_{(n)}^{-\beta-n}$$

$$P(\theta|X)=\frac{h(X,\theta)}{m(X)}=\frac{\frac{1_{x_{(n)}\leqslant\theta}}{\theta^{\beta+n+1}}}{\frac{x_{(n)}^{-\beta-n}}{\beta+n}}=\frac{(\beta+n)x_{(n)}^{\beta+n}}{\theta^{\beta+n-1}}1_{x_{(n)}\leqslant\theta}$$

所以 θ 的后验分布为参数为 $\beta+n$ 和 $x_{(n)}$ 的帕雷托分布，从而帕雷托分布是 θ 的共轭先验分布。 □

(2) 求 θ 的贝叶斯估计。

解：

θ 的贝叶斯估计为

$$\widehat{\theta}=\int_{x_{(n)}}^{+\infty}\theta p(\theta|X)\mathrm{d}\theta=\int_{x_{(n)}}^{+\infty}\frac{\theta(\beta+n)x_{(n)}^{\beta+n}}{\theta^{\beta+n+1}}\mathrm{d}\theta=\frac{\beta+n}{\beta+n-1}x_{(n)}$$

□

12. 从正态总体 $N(\theta,2^2)$ 中随机抽取容量为 100 的样本，又设 θ 的先验分布为正态分布，证明：不管先验分布的标准差为多少，后验分布的标准差一定小于 $\frac{1}{5}$。

证明：

设样本为 X，θ 的先验分布为 $N(\mu,\sigma^2)$，则 θ 的后验概率密度函数为

$$\begin{aligned}
&\pi(\theta|X) = cf(X|\theta)f(\theta) \\
&= c\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\theta}{2}\right)^2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta-\mu}{\sigma}\right)^2} \\
&= ce^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta-\mu}{\sigma}\right)^2-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\theta}{2}\right)^2} \\
&\geqslant ce^{-\frac{1}{2}\cdot 25(\theta-\mu-\overline{x})^2}
\end{aligned}$$

所以后验分布的标准差一定小于 $\frac{1}{5}$。 □

13. 设随机变量 X 服从负二项分布，其概率分布为

$$f(x|p) = \binom{x-1}{k-1}p^k(1-p)^{x-k}, \quad x = k, k+1, \cdots$$

证明其成功概率 p 的共轭先验分布族为贝塔分布族。

证明：

设 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$。设 p 的先验分布为贝塔分布 $Be(a,b)$，则 $\pi(p) = \frac{1}{B(a,b)}p^{a-1}(1-p)^{b-1}$，所以

$$\begin{aligned}
P(p|X) &= c\cdot h(X,p) = c\cdot P(X|p)\pi(p) = c\left(\prod_{i=1}^{n}\mathrm{C}_{x_i-1}^{k-1}p^k(1-p)^{x_i-k}\right)\frac{1}{B(a,b)}p^{a-1}(1-p)^{b-1} \\
&= cp^{nk}(1-p)^{-nk}(1-p)^{\sum_{i=1}^{n}x_i}p^{a-1}(1-p)^{b-1} \\
&= cp^{nk+a-1}(1-p)^{\sum_{i=1}^{n}x_i-nk+b-1}
\end{aligned}$$

其中 c 为与 p 无关的数。

所以 p 的后验分布为 $Be(nk+a, \sum_{i=1}^{n}x_i - nk + b)$，从而 p 的共轭先验分布族为贝塔分布族。 □

14. 从一批产品中抽检 100 个，发现 3 个不合格，假定该产品不合格率 θ 的先验分布为贝塔分布 $Be(2,200)$，求 θ 的后验分布。

解：

设总体为 X，则 $X \sim b(100,\theta)$，所以

$$\begin{aligned}
P(\theta|X) &= c\cdot P(X|\theta)\pi(\theta) = c\cdot\mathrm{C}_{100}^{3}\theta^3(1-\theta)^{97}\frac{1}{B(2,200)}\theta^1(1-\theta)^{199} \\
&= c\cdot\theta^4(1-\theta)^{296}
\end{aligned}$$

其中 c 为与 θ 无关的数。

所以 θ 的后验分布为 $Be(5,297)$。 □