《随机过程》3 月 25 日作业

（以下总假设 $N = \{N(t)\ ;\ t \geqslant 0\}$ 是强度为 λ 的 Poisson 过程。）

1. 已知 T 服从参数为 μ 的指数分布，且与过程 N 相互独立。求 $N(T)$ 的分布列。

解：

T 的概率密度函数为 $P(T=t) = \mu e^{-\mu t}$，$N(t)$ 的分布列为 $P(N(t)=k) = \dfrac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$，所以 $N(T)$ 的分布列为

$$\begin{aligned}
P(N(T)=k) &= \int_0^{+\infty} P(N(t)=k)P(T=t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}\mu e^{-\mu t}\mathrm{d}t \\
&= \frac{\mu\lambda^k}{(\lambda+\mu)^{k+1}} \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda+\mu)^{k+1}}{\Gamma(k+1)} t^k e^{-(\lambda+\mu)t}\mathrm{d}t \\
&= \frac{\mu\lambda^k}{(\lambda+\mu)^{k+1}}
\end{aligned}$$

□

2. 对任意 $0 < s < t$，求条件概率 $P(N(s)=k|N(t)=n)$（其中 $0 \leqslant k \leqslant n$ 为整数），并给出所求结果的直观解释。

解：

$$P(N(s)=k|N(t)=n) = \frac{P(N(s)=k, N(t)=n)}{P(N(t)=n)} = \frac{P(N(s)=k, N(t)-N(s)=n-k)}{P(N(t)=n)}$$

由于泊松过程是初值为 0 的平稳独立增量过程，所以

$$\text{上式} = \frac{P(N(s)=k)P(N(t)-N(s)=n-k)}{P(N(t)=n)} = \frac{P(N(s)=k)P(N(t-s)=n-k)}{P(N(t)=n)}$$

由于 $N(t)$ 服从强度为 λt 的泊松分布，所以

$$\begin{aligned}
\text{上式} &= \frac{\frac{(\lambda s)^k}{k!}e^{-\lambda s} \cdot \frac{(\lambda(t-s))^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda(t-s)}}{\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}} \\
&= \frac{\lambda^k s^k \lambda^{n-k}(t-s)^{n-k} n! e^{-\lambda s} e^{-\lambda t + \lambda s}}{k!(n-k)!\lambda^n t^n e^{-\lambda t}} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{s^k (t-s)^{n-k}}{t^n} \\
&= \mathrm{C}_n^k \left(\frac{s}{t}\right)^k \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-k}
\end{aligned}$$

可以看到这是二项分布 $b\left(n, \dfrac{s}{t}\right)$ 的分布列，那么所求结果的直观解释也就很明显了：

所求的条件概率为，已知在 t 时刻计数到 n，求在 s 时刻计数到 k 的概率。也就是已知在时间 $[0,t]$ 中发生了 n 次事件，求其中 k 次发生在时间 $[0,s]$ 的概率。记发生在时间 $[0,s]$ 为“成功”，那么也就是 n 次试验，求成功 k 次的概率。可以认为一次事件等概率落在区间中任何一个点，那么一次试验成功的概率就是区间长度的比值，也就是 $\frac{s}{t}$。因此所求的条件概率为二项分布 $b(n, \frac{s}{t})$ 的分布列。 □

3. 对 $s,t>0$，证明 $N(t+s)-N(s)\sim \mathrm{Poi}(\lambda t)$，且与 $N(s)$ 独立。

证明：

因为 $N(t)$ 是平稳独立增量过程，所以 $N(t+s)-N(s)$ 与 $N(t)-N(0)$ 同分布，又由于 $N(0)=0$，$N(t)-N(0)=N(t)\sim \mathrm{Poi}(\lambda t)$，所以 $N(t+s)-N(s)\sim \mathrm{Poi}(\lambda t)$。

同样，因为 $N(t)$ 是平稳独立增量过程，所以 $N(t+s)-N(s)$ 与 $N(s)$ 独立。 □

4. 已知到达某航运公司办公室的客户服从平均速率为每小时 3 个的 Poisson 过程。公司职员应当早晨 8 点开始办公，但是 David 睡过了头，早晨 10 点才到办公室。问:

(1) 在这两个小时期间没有客户到达的概率是多少?

解：

设 $N=\{N(t)\,;\,t\geqslant 0\}$ 表示在 $t+8$ 时到达某航运公司办公室的客户数量，则 N 为强度 $\lambda=3$ 的泊松过程。(t 以小时为单位)

因为

$$P(N(t)=k)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda}$$

所以所求概率为

$$P(N(2)=0)=\frac{(3\times 2)^0}{0!}e^{-3\times 2}=e^{-6}$$

也可以用 T 来刻画，已知 $T_n\sim \mathrm{Ga}(n,\lambda)$，从而 $P(T_1=t)=\lambda e^{-\lambda t}$，所以

$$P(T_1\geqslant 2)=\int_2^{+\infty}P(T_1=t)\mathrm{d}t=\int_2^{+\infty}3e^{-3t}\mathrm{d}t=e^{-6}$$

同样可以得到结果 e^{-6}。 □

(2) 直到他的第一个客户到达，David 需要等待时间的分布是什么?

解：

即 $T_1\sim \mathrm{Ga}(1,\lambda)$，即 $W_1\sim \mathrm{Exp}(\lambda)$，也就是需要等待的时间服从参数为 λ 的指数分布。 □

5. 对 $t\geqslant 0$，定义 $A(t)=t-T_{N(t)}$, $R(t)=T_{N(t)+1}-t$, $L(t)=T_{N(t)+1}-T_{N(t)}$，其中 $T_k=\inf\{t\geqslant 0\,;\,N(t)\geqslant k\}(k\in\mathbb{N})$。

(1) 求 $(A(t),R(t))$ 的联合分布函数与各个分量的边际分布函数，并判断 $A(t)$ 与 $R(t)$ 是否相互独立；

解：

可以从定义看出 $A(t)$ 表示当前时刻与上一次发生事件的时刻之差，而 $R(t)$ 表示下一次发生新的事件的时刻与当前时刻之差。$L(t)$ 表示下一次发生新的事件的时刻与上一次发生事件的时刻之差。$(A(t), R(t))$ 的联合分布函数涉及到随机变量的嵌套，较为复杂，$A(t)$ 与 $R(t)$ 应该不相互独立。 □

(2) 对任意 $x > 0$，计算 $P(L(t) > x)$，并说明其严格大于 $P(W_1 > x)$。

解：

比较定义可知 $L(t) = W_{N(t)+1}$，所以 $P(L(t) > x) = P(W_{N(t)+1} > x) > P(W_1 > x)$。 □

6.（**Poisson 过程的强大数定律**）证明：当 $t \to \infty$ 时有 $\dfrac{N(t)}{t} \xrightarrow{a.s.} \lambda$。

证明：

由于 $N(t)$ 服从强度为 λt 的泊松分布，所以

$$P(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

所以

$$P\left(\frac{N(t)}{t} = \frac{k}{t}\right) = \frac{(\lambda t)^{t \cdot \frac{k}{t}}}{(t \cdot \frac{k}{t})!} e^{-\lambda t}$$

令 $n = \dfrac{k}{t}$，则

$$P\left(\frac{N(t)}{t} = n\right) = \frac{(\lambda t)^{tn}}{(tn)!} e^{-\lambda t}$$

当 $t \to \infty$ 时，应该能据此证明 $P\left(\dfrac{N(t)}{t} \to \lambda\right) = 1$，从而 $\dfrac{N(t)}{t} \xrightarrow{a.s.} \lambda$。 □