第一次作业

第 2 章 基本概念

2.7 假设 $\{Y_t\}$ 平稳，且有自协方差函数 γ_k

(a) 通过求 $\{W_t\}$ 的均值和自协方差函数，证明 $W_t = \nabla Y_t = Y_t - Y_{t-1}$ 平稳。

证明：

由于 $\{Y_t\}$ 平稳，所以 $EY_t = EY_{t-1}$，所以 $\{W_t\}$ 的均值函数为

$$EW_t = E(Y_t - Y_{t-1}) = EY_t - EY_{t-1} = 0$$

可见 $\{W_t\}$ 的均值函数恒为常数。$\{W_t\}$ 的自协方差函数为

$$\begin{aligned}\gamma'_{t,s} &= \mathrm{Cov}(W_t, W_s) = \mathrm{Cov}(Y_t - Y_{t-1}, Y_s - Y_{s-1}) \\ &= \mathrm{Cov}(Y_t, Y_s) + \mathrm{Cov}(Y_t, Y_{s-1}) + \mathrm{Cov}(Y_{t-1}, Y_s) + \mathrm{Cov}(Y_{t-1}, Y_{s-1}) \\ &= 2\gamma_{|t-s|} + \gamma_{|t-s+1|} + \gamma_{|t-s-1|}\end{aligned}$$

将 s 替换为 $t-k$ 后可得

$$\gamma'_{t,t-k} = 2\gamma_{|k|} + \gamma_{|k+1|} + \gamma_{|k-1|}$$

可见自协方差函数只与时间间隔 k 有关，所以 W_t 平稳。 □

(b) 证明：$U_t = \nabla^2 Y_t = \nabla [Y_t - Y_{t-1}] = Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2}$ 是平稳的。(不必求出 $\{U_t\}$ 的均值和自协方差函数。

证明：

根据 **(a)** 可知 $\{Y_t\}$ 平稳 $\Longrightarrow$ $\{\nabla Y_t\}$ 平稳，又因为 $U_t = \nabla^2 Y_t = \nabla(\nabla Y_t)$，所以 $\{U_t\}$ 也是平稳的。 □

2.9 假设 $Y_t = \beta_0 + \beta_1 t + X_t$，其中 $\{X_t\}$ 是零均值平稳序列，具有自协方差函数 γ_k，并且 β_0 和 β_1 是常数。

(a) 证明：$\{Y_t\}$ 非平稳，但是 $W_t = \nabla Y_t = Y_t - Y_{t-1}$ 平稳。

证明：

$EY_t = E(\beta_0 + \beta_1 t + X_t) = \beta_0 + \beta_1 t$，与 t 有关，所以 $\{Y_t\}$ 非平稳。而

$$W_t = \nabla Y_t = Y_t - Y_{t-1} = X_t - X_{t-1} + \beta_1 t - \beta_1(t-1) + \beta_0 - \beta_0 = X_t - X_{t-1} + \beta_1 = \nabla X_t + \beta_1$$

根据 **2.7** 可知，由 $\{X_t\}$ 平稳可知 $\{\nabla X_t\}$ 也平稳，而增加常数 β_1 不影响均值函数和自协方差函数，所以 $W_t = \nabla X_t + \beta_1$ 也平稳。 □

(b) 一般地，证明：如果 $Y_t = \mu_t + X_t$，其中 $\{X_t\}$ 是零均值平稳序列，μ_t 是 t 的 d 阶多项式，那么当 $m \geqslant d$ 时，$\nabla^m Y_t = \nabla(\nabla^{m-1} Y_t)$ 是平稳的；而当 $0 \leqslant m < d$ 时非平稳。

证明：

设 $\mu_t = \sum_{i=0}^{d} a_i t^i$，其中 $a_i (i = 0, 1, 2, \cdots, d)$ 是系数。那么根据 **(a)** 的规律，当 $0 \leqslant m < d$ 时，$\nabla^m Y_t = \sum_{i=m}^{d} a_i t^{i-m} + \nabla^m X_t$，$E\nabla^m Y_t = \sum_{i=m}^{d} a_i t^{i-m}$，与 t 有关，所以 $\nabla^m Y_t$ 非平稳。

当 $m = d$ 时，$\nabla^m Y_t = a_d + \nabla^m X_t$，由 $\{X_t\}$ 平稳可知 $\{\nabla^m X_t\}$ 也平稳，而增加常数 a_d 不影响均值函数和自协方差函数，所以 $\{\nabla^m Y_t\}$ 也平稳，所以当 $m \geqslant d$ 时，$\nabla^m Y_t = \nabla(\nabla^{m-1} Y_t)$ 也是平稳的。 □

2.13 令 $Y_t = e_t - \theta(e_{t-1})^2$。这里假设白噪声序列是正态分布。

(a) 求 $\{Y_t\}$ 的自相关函数。

解：

当 $s = t+1$ 时，$\gamma_{t,s} = \mathrm{Cov}(Y_t, Y_{t+1}) = \mathrm{Cov}(e_t - \theta(e_{t-1})^2, e_{t+1} - \theta e_t^2) = \mathrm{Cov}(e_t, \theta e_t^2) = E(e_t \theta e_t^2) - E(e_t)E(\theta e_t^2) = 0$，同理，当 $t = s+1$ 时，$\gamma_{t,s} = 0$。

$$\gamma_{t,s} = \mathrm{Cov}(Y_t, Y_s) = \mathrm{Cov}(e_t - \theta(e_{t-1})^2, e_s - \theta(e_{s-1})^2) = \begin{cases} 0, & |t-s| \geqslant 1 \\ 1, & t = s \end{cases}$$ □

(b) $\{Y_t\}$ 平稳吗？

解：

$EY_t = Ee_t - \theta E(e_{t-1})^2 = -\theta E(e_{t-1})^2$，其中 $E(e_{t-1})^2$ 是正态分布的随机变量的平方的均值，是一个常数，与 t 无关，并且 $\gamma_{t,s}$ 只与 $|t-s|$ 有关，所以 $\{Y_t\}$ 平稳。 □

2.17 令 $\{Y_t\}$ 平稳，自协方差函数为 γ_k。令 $\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} Y_t$，证明：

$$\operatorname{Var}(\overline{Y}) = \frac{\gamma_0}{n} + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)\gamma_k = \frac{1}{n}\sum_{k=-n+1}^{n-1}\left(1-\frac{|k|}{n}\right)\gamma_k$$

证明：

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}(\overline{Y}) &= \operatorname{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} Y_t\right) = \frac{1}{n^2}\operatorname{Var}\left(\sum_{t=1}^{n} Y_t\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{t=1}^{n}\operatorname{Var} Y_t + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}\operatorname{Cov}(Y_i, Y_j)\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{t=1}^{n}\operatorname{Cov}(Y_t, Y_t) + \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}\operatorname{Cov}(Y_i, Y_j) \\
&= \frac{1}{n^2}\cdot n\gamma_0 + \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\gamma_k \\
&= \frac{\gamma_0}{n} + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)\gamma_k \qquad ① \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=-n+1}^{-1}\left(1-\frac{-k}{n}\right)\gamma_k + \frac{1}{n}(1-\frac{0}{n})\gamma_k + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)\gamma_k \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=-n+1}^{n-1}\left(1-\frac{|k|}{n}\right)\gamma_k \qquad ②
\end{aligned}$$

根据①②即得证。 □

2.20 考虑标准的随机游动模型：$Y_t = Y_{t-1} + e_t$，$Y_1 = e_1$。

(a) 使用上述 Y_t 的表达式，证明在初始条件 $\mu_1 = E(e_1) = 0, t > 1$ 时，$\mu_t = \mu_{t-1}$，由此证明对所有 t，都有 $\mu_t = 0$。

证明：

$t > 1$ 时，$\mu_t = E(Y_t) = EY_{t-1} + Ee_t = EY_{t-1} = \mu_{t-1}$，又因为 $\mu_1 = 0$，所以对所有 t，都有 $\mu_t = 0$。 □

(b) 类似地，证明 $t > 1$，$\operatorname{Var}(Y_1) = \sigma_e^2$ 时，$\operatorname{Var}(Y_t) = \operatorname{Var}(Y_{t-1}) + \sigma_e^2$，从而 $\operatorname{Var}(Y_t) = t\sigma_e^2$。

证明：

$t > 1$ 时，$\operatorname{Var}(Y_t) = \operatorname{Var}(Y_{t-1}) + \operatorname{Var}(e_t) = \operatorname{Var}(Y_{t-1}) + \sigma_e^2$，又因为 $\operatorname{Var}(Y_1) = \sigma_e^2$，所以对所有 t，$\operatorname{Var}(Y_t) = t\sigma_e^2$。 □

(c) 对 $0 \leqslant t \leqslant s$，用 $Y_s = Y_t + e_{t+1} + e_{t+2} + \cdots + e_s$ 证明 $\mathrm{Cov}(Y_t, Y_s) = \mathrm{Var}(Y_t)$，因而有 $\mathrm{Cov}(Y_t, Y_s) = \min(t, s)\sigma_e^2$。

证明：

对 $0 \leqslant t \leqslant s$，$Y_s = Y_t + \sum_{i=t+1}^{s} e_i$，所以 $\mathrm{Cov}(Y_t, Y_s) = \mathrm{Cov}\left(Y_t, Y_t + \sum_{i=t+1}^{s} e_i\right) = \mathrm{Cov}(Y_t, Y_t) + \mathrm{Cov}\left(Y_t, \sum_{i=t+1}^{s} e_i\right) = \mathrm{Var}(Y_t) = t\sigma_e^2$，

所以 $\mathrm{Cov}(Y_t, Y_s) = \min(t, s)\sigma_e^2$。 □

第 4 章　平稳时间序列模型

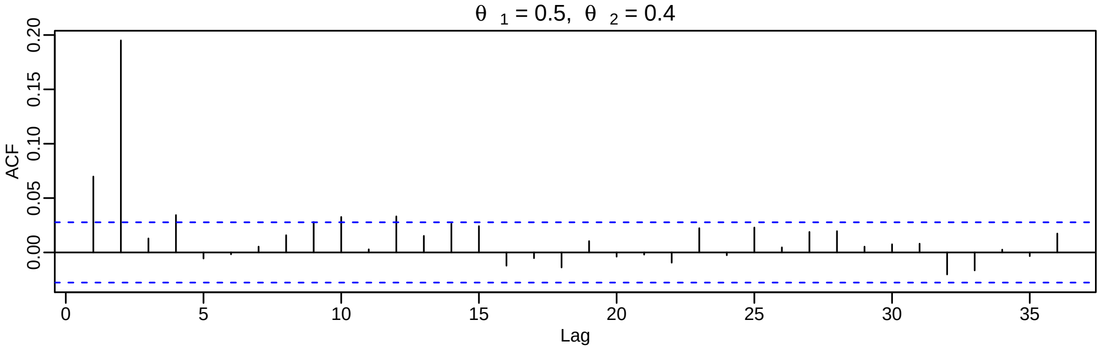
4.2 画出以下 MA(2) 模型的自相关函数图，系数设为:

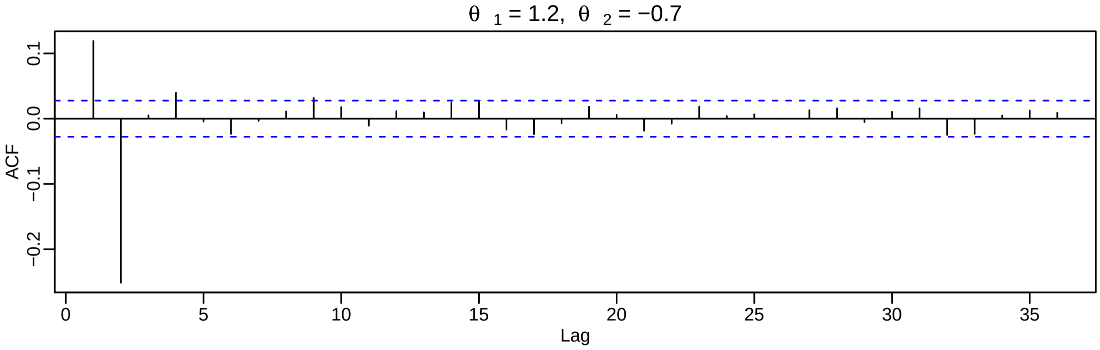
(a) $\theta_1 = 0.5$，$\theta_2 = 0.4$

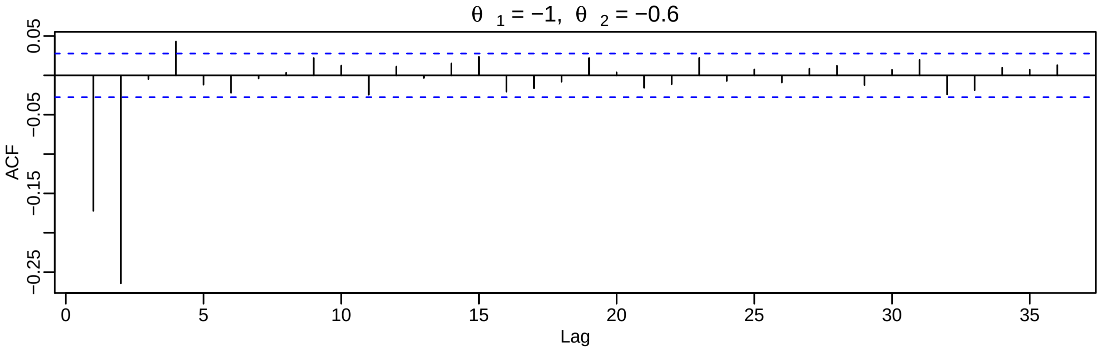
(b) $\theta_1 = 1.2$，$\theta_2 = -0.7$

(c) $\theta_1 = -1$，$\theta_2 = -0.6$

```r
w <- rnorm(5050, mean=0, sd=1)
pdf("1.pdf")
par(mfrow=c(3, 1), mar=c(4, 3, 1.5, 1.5), mgp=c(1.5, 0.5, 0))
v <- filter(w, filter = c(1, 0,5, 0.4), method = "convolution", sides = 1)[25:(length(w) - 24)]
acf(v, main=expression(paste(theta["   1"], " = 0.5,  ", theta["   2"], " = 0.4")))
v <- filter(w, filter = c(1, 1.2, -0.7), method = "convolution", sides = 1)[25:(length(w) - 24)]
acf(v, main=expression(paste(theta["   1"], " = 1.2,  ", theta["   2"], " = -0.7")))
v <- filter(w, filter = c(1, -1, -0.6), method = "convolution", sides = 1)[25:(length(w) - 24)]
acf(v, main=expression(paste(theta["   1"], " = -1,  ", theta["   2"], " = -0.6")))
dev.off()
```







4.4 证明 θ 被 $\frac{1}{\theta}$ 代替时，MA(1) 过程的自相关函数不变。

证明：

MA(1) 的模型表达为 $Y_t = e_t - \theta e_{t-1}$，因此 $\mathrm{Var}(Y_t) = \sigma_e^2(1+\theta^2)$，且 $\mathrm{Cov}(Y_t, Y_{t-1}) = \mathrm{Cov}(e_t - \theta e_{t-1}, e_{t-1} - \theta e_{t-2}) = \mathrm{Cov}(-\theta e_{t-1}, e_{t-1}) = -\theta\sigma_e^2$。所以

$$\rho_1 = \frac{-\theta\sigma_e^2}{\sigma_e^2(1+\theta^2)} = \frac{-\theta}{1+\theta^2}$$

用 $\frac{1}{\theta}$ 替换 θ 后，

$$\rho_1' = \frac{-\frac{1}{\theta}}{1+\left(\frac{1}{\theta}\right)^2} = \frac{-\theta}{\theta^2+1} = \rho_1$$

即 MA(1) 过程的自相关函数不变。 □